Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta

DISERTAČNÍ PRÁCE

Tvorba geometrických schémat u žáků 1. stupně prostřednictvím podnětných geometrických prostředí

Construction of elementary pupils' geometric schemas via motivating learning environments

Jaroslava Kloboučková

Vedoucí práce: doc. RNDr. Darina Jirotková, Ph.D.

Studijní program: Pedagogika

Studijní obor: Didaktika matematiky

2015

Prohlašuji, že jsem disertační práci na téma Tvorba geometrických schémat u žáků 1. stupně prostřednictvím podnětných geometrických prostředí vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Praha 3. 6. 2015

....

podpis

Děkuji své školitelce doc. RNDr. Darině Jirotkové, Ph.D. za odborné vedení práce. Věnovala mi čas na konzultace, radila mi nejen v konkrétních otázkách týkajících se psaní disertační práce, ale pomohla mi také zorientovat se v akademickém světě. Dále děkuji doc. RNDr. Nadi Vondrové, Ph.D. za rady z oblasti metodologie didaktického výzkumu. Oběma děkuji za péči o můj odborný rozvoj.

Dále děkuji své rodině, především svému muži, za neutuchající podporu.

Název: Tvorba geometrických schémat u žáků 1. stupně prostřednictvím podnětných geometrických prostředí

Autor: Jaroslava Kloboučková

Katedra: Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Školitel: doc. RNDr. Darina Jirotková, Ph.D.

Abstrakt: Cílem předložené disertační práce je pojednat o problematice vyučování geometrie jako nedílné součásti výuky matematiky na prvním stupni základní školy. Práce mapuje i dlouhodobý výukový experiment zahájený v roce 2010 a na pozadí tohoto experimentu řeší otázky poznávaní geometrického učiva dětmi mladšího školního věku. Hlavním cílem mé práce bylo nalézt odpovědi na čtyři výzkumné otázky: Jakým způsobem poznávají děti geometrické objekty? Jak si vzájemně předávají své znalosti, zkušenosti, objevy ze světa geometrie? Jak (na jaké úrovni) jsou schopny porozumět učivu, které je formálně v kurikulárních dokumentech (RVP ZV) zařazeno do pozdějších vzdělávacích období? Které jevy dokáží pochopit a popsat užitím mateřského jazyka?

V teoretické části práce je hlavní pozornost věnována poznávacímu procesu a typologii matematických úloh vždy se zaměřením na geometrii. Dále jsou popsána čtyři konkrétní podnětná geometrická prostředí – Krychlové stavby, Origami, Dřívková geometrie a Parkety a jeden tematický celek Obvod a obsah rovinných útvarů. Je provedena didaktická analýza uvedených prostředí. Nechybí ani výhled do vyšších ročníků základní školy a vlastní formulace i řešení úloh, které vycházejí z uvedených oblastí, ale zároveň mají přesah do vyšší matematiky.

Praktická část práce se skládá ze čtyř případových studií. V každé je popsána a analyzována jedna konkrétní výuková situace, ze které jsem vycházela při přípravě a následném provedení dílčího výukového experimentu. V první případové studii se jedná o kombinatorickou strukturu krychlové stavby a analýzu kombinatorického myšlení konkrétního žáka. Druhá případová studie se týká způsobu poznávání vlastností mnohoúhelníků manipulativní činností. Třetí případová studie je zaměřena na vztah rovinné a prostorové geometrie. Poslední čtvrtá případová studie se zabývá žákovským poznáním pojmů shodná a neshodná zobrazení v rovině.

V závěru jsou popsány jednak přínosy práce, ale i omezení, která takto aplikovaný výzkum přináší, a je nastíněno jeho možné pokračování.

Klíčová slova: výuka geometrie, obvod a obsah mnohoúhelníku, vlastnosti mnohoúhelníku, poznávací proces v geometrii, krychlové stavby, origami, dřívka, parkety.

Title: Construction of elementary pupils' geometric schemas via motivating learning environments

Author: Jaroslava Kloboučková

Department: Department of mathematics and mathematics education

Supervisor: doc. RNDr. Darina Jirotková, Ph.D.

Abstract: The aim of the dissertation is to discuss teaching geometry as integral part of mathematics education at the primary school level. The thesis also documents a longitudinal teaching study which was initiated in 2010 and which gives us a base for discussion of some fundamental questions regarding the process of learning geometry for pupils in their early school years. The main objective here is to attempt to answer the following four didactic questions: In which way do pupils learn about geometrical objects? How do they share their geometrical knowledge, experience and discoveries with one another? How much (at what level) are they able to understand mathematical concepts that the official curricular documents (the Czech Framework for Education Program) place in later years of schooling? What phenomena are they able to grasp and describe using their mother tongue?

The theoretical framework focuses on the learning process and the typology of mathematical problems in geometry. Four specific engaging environments (Cube Buildings, Origami, Wooden Sticks, and Tiles) and one content area (Area and perimeter in plane) are introduced, described and didactically analysed. There is also a proposed extension of these environments into further years of mathematics education: the formulation and solution of problems that are grounded in these environments and build on the relevant concepts in higher levels of mathematics.

Four case studies form the foundation of the empirical investigation. Each of the case studies describes and analyses one classroom situation. The situations were carefully chosen to prepare and conduct a teaching study. The first case study looks at the combinatory analysis of a cube construction and the analysis of a pupil's combinatorial thinking. The second case study is about the ways pupils learn about the characteristics of polygons. The third case study focuses on the relationship between the plane and space geometries. The last case study is an investigation into a pupil's understanding of the concept of isometric and non-isometric transformations in the plane.

The conclusion highlights the main contribution the dissertation brings, discusses the limitations of applied research in this area, and outlines the rationale for further research.

Key words: geometry teaching, geometry learning, perimeter and area of quadrilaterals, attributes of quadrilaterals, Cube Buildings, Origami, Wooden Sticks, and Tiles.

Obsah

Kdo chce poznat současnost bez znalostí minulosti, ten současnost nikdy nepochopí.

G.W.Leibnitz (Mikulčák, 2010 s. 9)

1 Úvod

Školství je oblast lidského konání, se kterou má osobní zkušenost každý z nás. Zrovna tak i já jsem si kdysi myslela, že učit děti umí každý a není potřeba nikterak studovat. Stačí něco (matematiku) dobře umět a pak to také dokážeme naučit ostatní. Když jsem se tedy řízením osudu po absolvování střední školy nemohla hlásit na vysokou školu a řádně studovat vysněnou jadernou fyziku, uvažovala jsem o své profesní cestě učitelky matematiky a fyziky na základní škole. V dalším textu uvádím své velmi osobní vzpomínky na počátky a další průběh mé učitelské kariéry. Na osobním příběhu bych chtěla ukázat, jak se měnil nejen můj pohled na didaktiku matematiky, ale zasadit svůj osobní profesní život do historického a společenského kontextu.

1.1 Vlastní cesta k didaktice matematiky

V roce 1987 jsem získala místo na vesnické základní škole jako učitelka pro 5. – 8. ročník, kde jsem neaprobovaně vyučovala matematiku a fyziku, později i chemii a tělesnou výchovu, ještě později němčinu a angličtinu. Už tento výčet svědčí o tom, jaká byla filozofie aspoň některých vedoucích pracovníků – není nutné být odborníkem, a přesto se můžete postavit před třídu a učit téměř cokoliv. Odpovídalo to tehdejšímu smýšlení o didaktice matematiky a „didaktickým“ zásadám, že učit děti znamená co nejpřesněji a nejpodrobněji vyložit učivo v souladu s tehdejšími osnovami a jedinou platnou učebnicí pro daný předmět a ročník.

Vybavena teoretickými znalostmi ze středoškolského studia jsem tedy předstupovala před své žáky a snažila jsem se je učit, jak nejlépe jsem dovedla. Stále jsem však byla ve střehu, neboť jsem si nikdy nebyla jistá, zda nebudu dělat chyby. Necítila jsem se příliš jistá nejen didakticky správným postupem výuky, ale ani dostatečně matematicky vzdělaná. Při zaměstnání jsem si tedy doplnila vzdělání, ale ani tehdy jsem se na vysoké škole z didaktiky nedozvěděla nic nového. Veškerá didaktika matematiky, resp. to, co jsem se tehdy dozvěděla o výuce, spočívala v přehledu, do kterého ročníku jsou zařazena jednotlivá matematická témata.

Neměla jsem pocit úspěchu, spíše jsem pociťovala frustraci, která vyplývala z velmi rozdílných výsledků testů. Přestože jsem každý tematický celek vyložila nejlépe, jak jsem mohla a uměla, s dětmi poctivě procvičila typové úlohy, zadala a opravila domácí úkol a nakonec zadala a opravila písemnou práci. Výsledky většinou odpovídaly normálnímu rozdělení – přibližně stejné množství jedniček i pětek, nejvíce dětí bylo hodnoceno trojkou. Další tematický celek a naprosto stejná situace. Po nějaké době jsem zjistila, že v hlavách dětí příliš mnoho poznatků nezůstává. To se projevilo tehdy, když bylo potřeba na dříve probranou učební látku navazovat, neboť bylo nutno skoro vše znovu objasnit, vše znovu vysvětlit. Hledala jsem příčinu tohoto stavu, ale v té době jsem si nepřipouštěla, že něco dělám špatně já a už vůbec jsem netušila, že moje představa o výuce nemůže vést k cíli. Tehdy jsem skutečně byla přesvědčená, že stačí, když bude učitel všechno co nejlépe umět sám, dětem ukáže, jak se to má řešit, a všichni si zapamatují správné postupy.

Z hodin jsem odcházela vyčerpaná především já, protože hlavní aktivita byla na mě, děti jsem odsouvala do pozice opisovače z tabule, kde jsem vše co nejlépe a co nejpodrobněji popsala a vyřešila. Protože jsem se ale stále snažila vidět dítě, nikoliv jen učivo, studovala a hledala jsem možnosti, jak to zařídit, aby má práce byla úspěšnější, aby nás všechny matematika bavila a zároveň aby se každé dítě naučilo v rámci svých možností co nejvíce.

V té době se mi dostalo do rukou první vydání publikace Dítě, škola a matematika (Hejný, Kuřina, 2001), kde jsem se poprvé seznámila s pojmy formalismus, konstruktivizmus, transmise a mnoha dalšími. A především jsem zde nalezla mnoho příběhů ze školní i mimoškolní praxe. Tato publikace mě velmi oslovila a jako obvykle „na koleně“ jsem se pokoušela zavádět prvky konstruktivizmu ve své práci. Netroufám si vůbec uvádět, že jsem začala konstruktivisticky učit matematiku, i když jsem si to tenkrát myslela.

1.2 Historie výuky matematiky v českých zemích, zejména geometrie

V této kapitole se pokusím stručně shrnout historický vývoj výuky geometrie na českých školách. Považuji za důležité umět svůj výzkum zasadit do historického kontextu i znát současný stav poznání. V dostupné literatuře jsem takovýto přehled týkající se mého tématu nenašla.

Přehled o nejstarší historii didaktiky matematiky od doby Komenského do roku 1918 jsem čerpala především z publikace J. Mikulčáka: Nástin dějin vzdělávání v matematice (a také školy) v Českých zemích do roku 1918 (2010), kde je tato problematika velmi podrobně rozpracována. Přehled o současném stavu mi poskytl článek N. Stehlíkové a M. Tiché: Didaktika matematiky a její proměny (2011), kde autorky poskytují stručný nástin historie didaktiky matematiky jako vědy v zahraničí a naznačují, jak se tento vývoj odráží v české didaktice matematiky. Domnívám se totiž, že neznalost dějin vyučování matematice by mohla vést ke znovuobjevování již dávno objeveného, a naopak znalost historie studovaného oboru i současně realizovaných výzkumů umožní výsledky nejen mého výzkumu posouvat dopředu.

1.2.1 O vyučování matematice v době J. A. Komenského

Ve Velké didaktice z roku 1632 charakterizuje J. A. Komenský čtyři šestileté stupně školního vzdělávání (školu mateřskou, národní, latinskou a univerzitu). Pro každý stupeň pak formuluje požadavky na znalosti a dovednosti jejich absolventů i z geometrie (Mikulčák, 2010, ss. 59, 60). Tyto požadavky bychom dnešním jazykem mohli definovat jako cíle či jako očekávané výstupy pro jednotlivé stupně výuky.

Školy mateřské:

> *„Geometrie fundament bude neškodný, naučí-li se rozuměti, co jest veliké, malé; dlouhé, krátké; široké, ouzké; tlusté, tenké; item co píď, co loket, co sáh."*

Školy národní:

> *„Měřiti podle umění způsobem jakýmkoliv, délky, šířky, dálky atd."*

Školy latinské:

> *„Je zdrávo, aby se žáci stali geometry jednak k rozmanitým života potřebám, jednak, že tyto vědy obzvláště k jiným věcem vtip probuzují a brousí."*

Univerzita (školy vševědné):

> *„Studium má začíti znalostí měr, ...z měřictví si mají žáci osvojiti znalost bodů a čar, ... mají se seznámiti s tvary v rovině, ...mají se probírati trojrozměrná tělesa, ...nedílná je i nauka o trojúhelnících, ...probere se užití geometrických poznatků ve stavitelství."*

Jak vidíme, Komenský zařazoval do obsahu jednotlivých stupňů i geometrii, zdůrazňoval potenciál učiva geometrie pro rozvoj myšlení (*„tyto vědy obzvláště k jiným věcem vtip probuzují a brousí")*, vlastní učivo geometrie je však patrné až z rukopisů učebnic geometrie a geodézie, které psal buď Komenský sám jako konspekt knihy, nebo je to zápis Komenského přednášek.

Vrcholem vědeckého zpracování geometrie byly v době Komenského stále ještě Euklidovy *Základy*. Každé jiné dílo bylo jejich více či méně dokonalým výtahem. To platí v plné míře i o Komenského Geometrii. Můžeme v ní sice nalézt pokus o vybudování geometrie z několika předem definovaných pojmů, práce však opakuje nedostatky Euklidových základů, jako jsou definice základních pojmů bod, přímka a rovina, či definice pomocí jiných nedefinovaných pojmů (např. *přímka protínající jiné se jmenuje kolmice, jestliže se setkává s jinou kolmo).*

V roce 2007 uplynulo sto let od prvního českého vydání Euklidových Základů. Jejich překlad pořídil František Servít (1848-1923), profesor českého Gymnasia vinohradského. Historicky druhý překlad komentovaný P. Vopěnkou byl vydán v roce 2007. P. Vopěnka zde užívá Servítův překlad především ve vlastní matematické části (téměř doslovné znění tohoto překladu) a podstatnější zásahy provádí pouze v úvodních textech (Euklides, 2007, s. 5).

1.2.2 Období od Národního obrození do počátku 20. století

Ještě i na počátku 19. století se jako učebnice geometrie používal Servítův překlad prvních čtyř knih Základů. Deduktivní výstavba základů geometrie však nebyla vhodná pro začátečníky a až do konce 18. století nebylo toto učivo zařazováno do učiva obecných škol. Teprve J. H. Pestalozzi se pokusil vykládat geometrické poznatky dětem pomocí názoru, jak můžeme vidět při studiu jeho práce Abeceda názornosti (Mikulčák, 2010). Pokrok ve vyučování základům geometrie představovala učebnice V. Harnische, ve které vycházel od výkladu krychle, svůj výklad opíral o názor na prostorové útvary. Žáky učil záhy pracovat s kružítkem a pravítkem a spojoval výklady o prostorových útvarech s výpočty jejich velikostí.

Rozvoj řemeslné a průmyslové výroby v této době vyžadoval zvýšení vzdělanosti širokých vrstev. Na různých místech vznikaly nedělní a sváteční řemeslnické školy pro dospělé. Obsah učiva byl v kompetenci majitelů jednotlivých panství. Např. ve Zbraslavi byl schválen „*všeobecně učební plán, podle něhož se bude učiti z geometrie*

a) nauce o přímkách a úhlech, pouze pokud je nezbytné je měřit a přenášet, vykládané co nejpraktičtěji,

b) vypočítávání ploch a objemů podle praktických pravidel,

c) kreslení uvedených obrazců vůbec, obzvláště však se zřetelem na řemeslo a potřebu jednotlivých účastníků“

V metodách práce se zdůrazňovalo, že je potřeba nejprve názorně předvádět praktické použití a až z takového vysvětlování měly vyplynout principy.

Podobné nedělní řemeslnické školy byly i v Praze, Náchodě, Křivoklátě, celkem ve více než 10 místech. Jejich zaměření se přizpůsobovalo řemeslům běžným v okolí (textilní, lesnické, obchodní aj.).

Jako učebnice geometrie pro nižší reálky vyšla roku 1855 kniha Lehrbuch der Geometrie. Učebnice je to dvojdílná, německo-česká. V německém textu je za každým německým termínem v závorce uveden český překlad a také znění všech pouček i úkolů je za německým zněním i v češtině.

V prvním oddíle seznamuje žáky se základními pojmy geometrie propedeuticky, z názoru, bez důkazů. Nejprve se probírají tělesa se třemi rozměry. Kulatá tělesa se mohou koulet; tělesa, která se nemohou koulet, jsou hranatá. Hranicemi těles jsou plochy, hranicemi ploch čáry, hranicemi čar jsou body. Terminologicky se nerozlišují přímky a úsečky, probírají se dvojice přímek. Obvyklé je učivo o trojúhelnících a čtyřúhelnících a jejich sestrojování, obvyklé je i učivo o kružnici, středových a obvodových úhlech, o vzájemné poloze dvou kružnic, o mnohoúhelnících vepsaných a opsaných.

Ve druhém oddíle se znovu probírá planimetrie, ale tentokrát se věty po-učné, po-učky již dokazují, např. Pythagorejská věta. Jsou zde zmíněny i křivé čáry: čára vejčitá, oblouk sedlový, kobylí hlava, spirálka neboli čára závitková. Sestrojování shodných i podobných útvarů je doprovázeno i topografickými aplikacemi. Ve stereometrii se na tělesech vysvětluje vzájemná poloha rovin. Po stručném popisu obvyklých těles jsou zařazeny základní poučky o promítání na dvě k sobě kolmé průmětny, jsou uvedeny průměty základních těles včetně pravidelných mnohostěnů a sítě všech zobrazených těles. Počítají se povrchy a objemy těles.

O obsahu a rozsahu učiva geometrie z období konce 19. a počátku 20. století svědčí i názvy předmětů a počty hodin v jednotlivých třídách. Uvádím zde pro názornost učební osnovy pro školy reálné. V I. - III. ročníku (nižší oddělení) se vyučovalo samostatným předmětům Počty a Měřictví v rozsahu 3 hodiny týdně, ve IV. – V. ročníku (střední oddělení) to byla ve IV. ročníku vedle obecné aritmetiky i Planimetrie a v V. ročníku Stereometrie, vše také v rozsahu 3 hodiny týdně. Poslední vyšší oddělení mělo předepsáno pro VI. třídu Geometrii a trigonometrii, pro VII. třídu Analytickou geometrii v rozsahu 3 hodiny týdně. V VIII. ročníku bylo zařazeno v rozsahu 2 hodiny týdně *„Souborné opakování z celého oboru matematiky a rozhled do minulosti i budoucnosti s historického a filosofického hlediska“.* (Mikulčák, 2010, s. 224). Od II. po VII. ročník bylo učivo geometrie součástí předmětu Deskriptivní geometrie v rozsahu 2 hodiny týdně v každém ročníku.

Z výše uvedeného stručného historického přehledu vyplývá, že geometrie byla chápána jako velmi obtížná část matematiky, měla ale své pevné místo v systému školních předmětů. Hlavní zaměření geometrie na jednotlivých stupních procházelo vývojem od poznávání tvarů, přes početní a konstrukční geometrii až k topografii. K tomuto historickému odkazu se ve své práci a především ve svém didaktickém přesvědčení hlásím také. Považuji geometrii za náročnou vědní disciplínu, kterou není možné v každodenní praxi opomíjet.

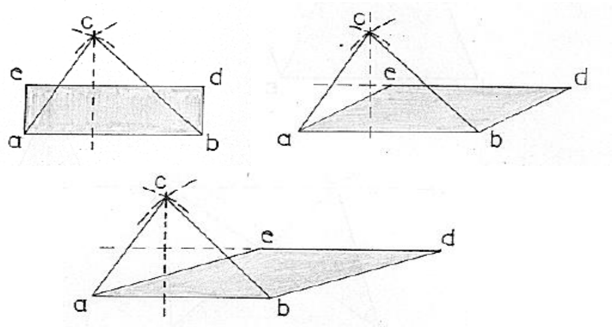
Při mém rozhodování o tématu diplomové práce v průběhu magisterského studia na vysoké škole jsem v rodinné knihovně objevila učebnici Geometrie pro nižší třídy škol reálných (Jarolímek, 1905), ze které získával geometrické znalosti můj děda. Rozhodla jsem se provést rozbor této učebnice geometrie ve své diplomové práci (Kloboučková, 1999) a podrobně jsem se zabývala jejím rozborem z hlediska jazykového, matematického i didaktického. Po obsahové stránce učebnice zahrnovala nejen všechna témata geometrie vyučovaná v matematice na druhém stupni tehdejších základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií, ale i některé další typy nestandardních úloh (propojujících různé oblasti geometrie, včetně deskriptivní geometrie). Např. tzv. „úlohy proměňovací“ (viz Ilustrace 1), kterým byla věnována samostatná kapitola, jsem nikde v žádné tehdy dostupné učebnici matematiky nenalezla. Provedla jsem také několik experimentů v odpovídajícím ročníku na tehdejším víceletém gymnáziu v Moravských Budějovicích. Tento typ úlohy, ačkoliv přeformulované do stávající jazykové i terminologické podoby, nebyl tehdy žádný žák gymnázia schopen nijak vyřešit. Součástí mé disertační práce bylo i řešení všech úloh z dané historické publikace, řešení uvedené ilustrace také pro zajímavost uvádím.

Ilustrace 1:

Originální znění: Trojúhelník abc, ab = 52, ac = 42, bc = 68 proměňte v trojúhelník a) v němž úhel při podstavě = 45°, b) rovnoramenný, c) jehož strana pobočná = 60.

Přeformulované znění:

Je dán trojúhelník ABC, kde c = 52 mm, b = 42 mm, a = 68 mm. Tento trojúhelník proměňte (obsah zůstane stejný) na trojúhelník a) s jedním vnitřním úhlem o velikosti 45°, b) rovnoramenný, c) s jednou stranou délky 60 mm.



Obrázek 1: Řešení úlohy z vlastní diplomové práce

1.2.3 Od první poloviny 20. století po současnost

Jak říká např. Kolář: „V českých zemích je dlouholetá geometrická tradice. Tato tradice byla vytvořena řadou vynikajících českých geometrů minulého století a začátku našeho století.“ (Kolář, 1986, s. 70), a jak jsem se pokusila doložit výše, byla geometrie v první polovině 20. století váženou disciplínou, protože pestrost a bohatost geometrického světa nabízela rozvoj těch potencí žáka, které byly tehdejší školou zdůrazňovány – tvořivost, schopnost organizovat soubor jevů, hledání řešitelských strategií, konstruování objektů, abstrahování různých situací, zdůvodňování vztahů, vymezování pojmů, řešení složitých úloh úzce propojených na stavebnictví, strojírenství, zeměměřičství, navigaci, astronomii, …

„Paradoxní situace nastala v roce 1948 zavedením jednotné čtyřleté střední školy, kterou navštěvovaly všechny děti ve věku 11 až 15 let. V matematice odpovídalo pojetí učiva v podstatě způsobu vyučování na dřívějším nižším stupni gymnázia nebo reálky. Učebnice sepsané řadou autorů pod vedením akademika Čecha byly dost náročné, nikoliv však nadměrně obtížné. Výjimku tvořila učebnice geometrie pro druhý ročník střední školy, obecně zvaná G2, která se stala postrachem nejen žáků, ale i jejich učitelů. Obsahovala systematický kurz geometrie postavený na axiomech a z nich odvozených větách. Všechny věty se dokazovaly, přičemž některé důkazy byly velice náročné, například důkazy sporem. Pro dvanáctileté děti byl tento způsob výkladu zcela nevhodný. Navíc si s ním nevěděli rady ani učitelé“ (Kraemer, 1986, s. 186).

V učebnicích pro tehdejší národní školy, které vznikaly koncem šedesátých let pod vedením akademika Čecha, nalezneme geometrické učivo jen sporadicky. Početnice pro 2. postupný ročník (Gulová, Žilinková, 1956) obsahuje 17 úloh zaměřených na určování délky, 32 úloh zaměřených na určování hmotnosti a objemu a 24 úloh zabývajících se převody délkových jednotek (cm a m). V početnici pro druhý (Zelina, Kocián, 1958) a pro čtvrtý (Kurfürst, 1961) ročník je situace obdobná. Výjimkou je početnice pro pátý ročník (Rakušanová, Pindroch, Tesař, Vyšín, 1959), která obsahuje samostatnou kapitolu V. Geometrie, a která na 42 stranách (z celkového rozsahu 164 stran) zahrnuje pojmy úsečka, přímka, jednotky délky, obvod a obsah obdélníka a čtverce, jednotky obsahu a měření vzdáleností v přírodě.

Řada učebnic vydávaných o deset let později nabízí žákům geometrii ještě méně. V početnici pro druhý ročník (Kadeřábek, Žilinková, 1971) je obsah i rozsah totožný s předchozí učebnicí. Početnice pro třetí ročník (Zelina, Lečko, Brož, 1961) nabízí měření a rýsování úseček, stran obrazců a zjišťování pravého úhlu. Ve čtvrtém ročníku (Kurfürst, Čejka, 1966) přibývá vedle měřičství ještě rýsování pravého úhlu. V početnici pro pátý ročník (Havlík, Pindroch, Tesař, 1968) nalezneme kapitolu Měření a vážení.

Když v šedesátých letech pod Bourbakistickým vlivem převážila v matematickém světě množinově - strukturální koncepce, stala se geometrie pro školskou matematiku přítěží, protože množinově strukturovatelná byla až na úrovni Kleinova pojetí geometrie. Klein ve svém Erlangenském programu v roce 1872 podal svůj přístup ke geometrickému světu. Jeho hlavní myšlenka tkví v přesunu pozornosti z geometrie objektů na geometrické transformace. Jednotícím principem se stal pojem grupy transformací, tedy pojem, který svou podstatou náleží do světa algebry (Jirotková 2010, s. 38).

Geometrie názoru, *geometrie prvního a druhého porozumění* (Vopěnka, 2000) byla s ideou množinové struktury neslučitelná. To vedlo k útlumu výuky geometrie v době modernizace školské matematiky a v mnoha zemích dokonce k úplnému vytlačení této disciplíny ze škol.[1]

U nás, v zemi silné geometrické tradice, došlo v době „modernizace matematiky“ k posunu koncepce výuky geometrie od geometrie názoru a spekulace k axiomatické výstavbě geometrie. Ještě v polovině osmdesátých let dvacátého století byla právě axiomatická stavba planimetrie těžištěm geometrické přípravy budoucích učitelů I. stupně, někde tato tendence přetrvává i v současnosti. Axiomatický přístup k výuce geometrie byl realizován v duchu transmisivního vyučování. Jedním z prvních propagátorů, který se podílel na zpracování axiomatické výstavby geometrie do školské matematiky včetně přípravy učebních textů pro učitele, byl Jan Vyšín, který sepsal velké množství učebnic pro všechny typy škol, včetně vysokoškolských učebních textů (Vyšín, 1959).

Podle mnoha různých šetření (na různých úrovních) i podle mých vlastních zkušeností jsou geometrické znalosti našich žáků základních i středních škol mnohdy i dnes spíše formální. Potvrzují to i výsledky celostátních testů realizovaných Centrem pro zjišťování výsledků vzdělávání (CERMAT). V částech testů, které se zaměřují na porozumění geometrickým pojmům, vztahům i dovednostem při jejich aplikaci, byly např. v roce 2006 u žáků 5. ročníků zjištěny hluboké nedostatky v porozumění pojmům trojúhelník a pojmům s ním souvisejících, ve vizuálních představách, v pojmech jako obvod a obsah obrazce ve čtvercové síti. Zjištěné nedostatky souvisí zřejmě s porozuměním těmto pojmům a nabízí se otázka, zda byly ve výuce realizovány jednotlivé fáze poznávacího procesu v geometrii (podrobněji viz 2.1).

[1] Geometrie prvního porozumění – pozorovatel eviduje geometrický jev; geometrie druhého porozumění – pozorovatel si uvědomuje vztahy a vazby mezi jednotlivými prvky daného geometrického jevu

U žáků 9. ročníku se procentuální úspěšnost rapidně snižuje. O rok později, v roce 2007 byly výsledky obdobné.

K odklonu od axiomatického budování školské geometrie a k návratu k původní a obohacené koncepci výuky došlo až začátkem devadesátých let, kdy začaly mezi autory učebnic i učitele intenzivněji pronikat poznatky didaktiky matematiky o mechanizmu poznávacího procesu. Myšlenky konstruktivizmu, které opětovně zdůrazňují potřebu rozvíjení tvořivosti, schopnosti organizovat soubor jevů, hledání řešitelských strategií, abstrahování atd. dávají naději, že geometrie názoru by mohla být rehabilitována a že geometrie by se opět mohla stát vhodným prostředím pro rozvoj uvedených psychických potencí žáka. V této době se začalo systematicky pracovat na tvorbě učebnic matematiky, které postupně od roku 2007 pomáhají zavádět do škol myšlenky a zásady konstruktivizmu (Hejný a kol, 2007).

Školská geometrie dává prostor především různorodé manipulativní činnosti žáka a je oblastí podněcující rozvoj žákova myšlení, přispívá ke kultivaci představ nejen geometrických. Geometrie je vedle teorie čísel tradiční prostředí pro rozvoj argumentačního myšlení. Konečně geometrie více než kterákoliv jiná oblast matematiky vzájemně propojuje životní zkušenost žáka a teoretické poznání. Mnohé jevy, např. úhlopříčku čtverce, lze modelovat skládáním papíru, nebo manipulativně znázorňovat v rovině, hra je přirozenou součástí života dítěte, vše, co nás obklopuje je vlastně geometrie.

1.3 Volba tématu práce, konkretizace výzkumné otázky

V průběhu několika posledních let jsem se účastnila mnoha celostátních konferencí, kde se setkávají učitelé matematiky, např. Dva dny s didaktikou matematiky (KMDM UK v Praze), Setkání učitelů matematiky všech typů i stupňů škol (FAV ZČU, Plzeň) a dalších. Velmi často jsem zde slyšela, jak nízká je úroveň znalostí a dovedností žáků základní školy z geometrie. Někteří učitelé se geometrickému učivu vyhýbají a považují jej v rámci matematiky za nedůležité. Mnozí učitelé přiznávají, že vlastně ani nevědí, jak dané geometrické učivo zprostředkovat žákům. Všeobecně si učitelé II. stupně ZŠ stěžují, že žáci přicházející z I. stupně mají v geometrii značné nedostatky, že nemají na co navazovat a na budování porozumění základním geometrickým pojmům a vazbám není čas. To se opakuje i při dalším přechodu z II. stupně ZŠ na střední školu. „Zatímco výstupní požadavky na znalosti vysokoškolských studentů matematických a technických disciplín stále stoupají, vstupní předpoklady díky redukci učiva geometrie a deskriptivní geometrie na středních školách silně zaostávají.“ (Lávička, 2006).

Všechna uvedená tvrzení jsou záměrně velmi obecná. Jsou to věty, které se v učitelské veřejnosti tradují, ale ne vždy má učitel k těmto výrokům relevantní podklady. Ráda bych porovnala výsledky mé práce za dobu posledních dvaceti pěti let, ale bohužel nemám přehledné a podrobné podklady. V počátcích své učitelské kariéry jsem si nevedla pedagogický deník ani si nedělala průběžné poznámky. Se svými tehdejšími žáky jsem nicméně v kontaktu, ale ani ti si již vše nepamatují. Proto především spoléhám na svoji chabou paměť, některé pocity jsou nezapomenutelné. Vím, že jsem byla vnitřně nespokojena s tím, jak se matematika na naší škole učí, a proto jsem v roce 2005 využila příležitosti a přihlásila se do konkurzu na pedagogickou fakultu. Tím jsem se dostala i k možnosti částečně působit na fakultní základní škole, kde jsem svůj dlouhodobý výzkum mohla uskutečnit. Zde jsem dostala na starosti jednu klasickou třídu, kde jsem zodpovědná za její výuku matematiky na prvním stupni. Při výuce sleduji celou třídu, nesnažím se pochopit poznávací proces jednotlivých dětí, ale spíš mě zajímá, co všechno jsou schopny zvládnout jako celek, i když se samozřejmě nevyhýbám pozorování jednotlivců. Úroveň poznávacího procesu budu srovnávat s požadovanými výstupy z RVP, neboť nemám předchozí souvislé zkušenosti s výukou na prvním stupni.

To vše jsou důvody pro volbu výzkumného zaměření mé disertační práce. V průběhu několika posledních let jsem podrobně sledovala svoji vlastní výuku matematiky u dětí mladšího školního věku optikou videokamery se zaměřením na geometrii. Pokusila jsem se popsat vlastní způsob vyučování geometrie a vyhledat takové situace, které by mohly dokládat mé chápání poznávacího procesu u dětí mladšího školního věku. Konkrétně jsem si stanovila tyto výzkumné otázky:

- Jakým způsobem poznávají děti geometrické objekty/jevy/vztahy/situace v koncepci VOBS (viz kap. 2.3.2)
- Jaká geometrická schémata si při svém poznávání vytvářejí
- Jaký geometrický jazyk při komunikaci o geometrických jevech používají.
- Jak jazyk v komunikaci o objektech odráží jejich myšlení a porozumění objektům

Základem mé práce je tedy dlouhodobý akční výzkum. Moje pozornost je samozřejmě zaměřena na geometrii. Odpovědi na jednotlivé výzkumné otázky sepíšu jako sérii případových studií, což je jeden ze základních přístupů kvalitativního výzkumu (viz 2. kapitola).

V současné praxi ve výuce matematiky na základní škole jsem jako základní výukový materiál používala řadu učebnic z Nakladatelství Fraus (Hejný a kol., 2007), kde jsou nositelem matematického obsahu podnětná výuková prostředí. Jako metodu výuky jsem důsledně uplatňována metoda VOBS (vyučování orientované na budování schémat). Oba tyto pojmy také popíši v druhé kapitole. Uvedu zde také typologii úloh z didaktického hlediska a teoretická východiska svého pedagogického výzkumu, tedy jeho zařazení do systému kvalitativního přístupu s ohledem na používané metody sběru dat, na metody usuzování i metody analýzy dat.
Celá 3. kapitola je zaměřena na metodologii práce, uvedu statistická data, která se týkají experimentální výuky i jednotlivých případových studií. Podrobně rozpracuji také jednotlivá prostředí s ohledem na výuku v 1. – 5. ročníku základní školy, která jsou nositelem matematického obsahu a kterými se zabývám ve své práci. Jednotlivá prostředí zde uvedu s jejich podrobným popisem, uvedu jejich didaktický potenciál i didaktické nástrahy, které mohou překvapit žáky i učitele při vlastní výuce. V neposlední řadě zde uvedu jednotlivé výukové a diagnostické úlohy, jak převzaté, tak autorské. U každé úlohy uvádím její plné znění, uvedu její hlavní i vedlejší výukový cíl.
Hlavní a stěžejní kapitolou mé práce je 4. kapitola, ve které podrobně popisuji výukové experimenty, které jsem zpracovala ve vybraných případových studiích. V každé případové studii je popsána a analyzována jedna konkrétní výuková situace, ze které jsem vycházela při přípravě a následném provedení dílčího výukového experimentu. První případová studie se týká způsobu poznávání vlastností mnohoúhelníků manipulativní činností. Zabývám se zde budováním pojmu trojúhelník a čtyřúhelník u žáků v prvním ročníku a také navazující výukovou situací ve čtvrtém ročníku. Ve druhé případové studii se jedná o kombinatorickou strukturu krychlové stavby a analýzu kombinatorického myšlení konkrétního žáka. Třetí případová studie je zaměřena na vztah rovinné a prostorové geometrie. Poslední čtvrtá případová studie se zabývá žákovským poznáním pojmů shodné a neshodné zobrazení v rovině. Součástí práce jsou i souhrnné výsledky v podobě popisu a analýzy kognitivních jevů, které byly pozorovány v průběhu experimentální výuky. Ve všech případových studiích se zamýšlím nad tím, jak děti poznávají jednotlivé geometrické objekty a jejich průvodní jevy. Také si všímám situací, které ukazují, jak si děti vzájemně předávají své znalosti, zkušenosti a objevy ve světě geometrie.

V 5. kapitole uvádím přehledné závěry jednotlivých případových studií, především se zamýšlím nad konkrétními oblastmi a úrovní, na které jsou děti schopny porozumět učivu, které je formálně v kurikulárních dokumentech (RVP ZV) zařazeno do pozdějších vzdělávacích období. Přehledně uvádím ty jevy, které děti dokáží pochopit a popsat užitím mateřského jazyka.

Disertační práce je ukončena závěrem, kde stručně shrnuji odpovědi na všechny výše položené otázky a uvádím přínosy své práce. Práce obsahuje také seznam použité literatury a přílohy, které jsou voleny tak, aby autenticky dokumentovaly všechny důležité momenty práce. Jedná se hlavně o originální přípravy na výuku, ukázky z pečlivě vedeného pedagogického deníku a doslovné přepisy hodin či jejich částí relevantních s uvedenými případovými studiemi.

2 Vymezení používaných pojmů, teoretická východiska práce

Tato práce se zabývá experimentální výukou geometrie dětí mladšího školního věku. Jedním z cílů, který jsem si stanovila, bylo hlouběji pochopit a popsat procesy, které se odehrávají v hlavách žáků mladšího školního věku, když se učí geometrii. K naplnění tohoto cíle jsem volila kvalitativní výzkum. Nástrojem výzkumu jsou geometrické úlohy přiměřené věku žáků. Některé úlohy byly převzaté, jiné jsou autorské, které podrobně uvádím ve třetí kapitole. Uskutečněný kvalitativní výzkum vychází z teorie případové studie (Yin, 2003, s. 13 – 14). Nejprve zde tedy vyjasním tyto pojmy: Poznávací proces v geometrii (2.1), Typologie úloh z didaktického hlediska (2.2), Konstruktivizmus a vyučování orientované na budování schémat (2.3) a Případová studie (2.4).

2.1 Poznávací proces v geometrii

Poznávací proces v geometrii se liší od poznávacího procesu v aritmetice, má svá specifika, protože geometrie jako samostatná vědní disciplína se od aritmetiky také samozřejmě liší. Poznávací proces v geometrii tak je mnohem různorodější v objektech, činnostech, vazbách i struktuře. Základními stavebními kameny geometrie jsou jednoduché geometrické objekty, tj. ty, které se již z ničeho neskládají (body, úsečky, kružnice, koule). Z těchto se tvoří objekty složitější. Úroveň porozumění složitějším objektům je možné vyjádřit pojmem osobnost geometrického objektu, kdy geometrický objekt se stává pro daného žáka geometrickou osobností, jestliže si jej tento žák dovede vyvolat v představě (vynořit z prázdnoty) bez opory modelů nebo obrázků (Vopěnka, 1989).

Geometrické objekty žáci poznávají na základě vlastní manipulativní činnosti. Hejný v souladu s van Hielem (2004) uvádí pět etap poznávacího procesu v geometrii, kdy pro první stupeň je důležitá etapa druhá a vstup do etapy třetí. První etapu nazývá synkretickou, kdy dítě získává prvotní zkušenosti s objektem, odehrává se převážně v předškolním věku. Druhou etapu označuje jako etapu předmětných představ. Geometrický pojem se postupně stává osobností (v duchu Vopěnky), i když stále zůstává vázán na předmětné představy. Důležitá je v této etapě manipulace s předměty. Třetí etapu nazývá Hejný jako etapu intuitivně abstraktních představ, kdy se předmětná manipulace stává manipulací myšlenkovou a kdy se začínají objevovat formalizované jazyky a překlady mezi nimi.

V používaných učebnicích (Hejný, 2007) je kouzelný svět geometrie se všemi svými specifiky otevírán žákovi prostřednictvím několika manipulativních prostředí – Krychlové stavby, Origami, Dřívka, Parkety, aj. V těchto prostředích se žáci přirozeně seznamují se všemi důležitými pojmy rovinné i prostorové geometrie.

2.2 Typologie úloh z didaktického hlediska

Úloha je velmi těžce definovatelný pojem. V zahraniční literatuře se setkáváme s pojmem *problém*, který je překládán často jako (matematická) úloha, ale také jako (matematický) problém. Různí autoři se v různé míře přiklánějí k jednomu nebo druhému významu. Např. Stehlíková (2000) vymezuje rozdíl mezi oběma českými synonymy takto: „Úloha je úkol, při jehož řešení žák nebo student pouze aplikuje dříve naučené strategie. Úloha se stává problémem, jestliže řešitel nezná okamžitě řešitelskou strategii a musí hledat novou strategii.“ (Stehlíková, 2000, s. 28)

Pojem úloha v této práci používám v nejširším možném významu, tedy bez ohledu na to, zda žák zná řešitelskou strategii, aplikuje dříve naučené postupy, či nikoliv. Při zadávání úloh v mé práci tedy by nebylo možné přesně vymezit, kdy se jedná o úlohu a kdy o problém. Nikdy se nestalo, že by zadaná úloha byla pro všechny žáky pouze rutinní úlohou, tedy kdy použili dříve naučené strategie. Nikdy nebyla zaznamenána ani situace, kdy by zadaná úloha byla pro všechny sledované žáky problémem, tedy kdy všichni museli hledat nové strategie pro řešení zadané úlohy.

Typologii úloh můžeme provádět z různých hledisek, z hlediska matematického, didaktického a (meta)kognitivního. Já jsem při své práci třídila úlohy ze všech výše uvedených hledisek, proto tuto typologii uvádím podrobněji.

2.2.1 Typologie úloh z matematického hlediska

Z hlediska matematického je možné úlohy rozlišovat mj. podle tematického celku. Toto členění je velmi různorodé, základní charakteristiky mohou vycházet z historického kontextu. Můžeme tedy hovořit o úlohách aritmetických, geometrických či algebraických. Každou kategorii můžeme dále členit do dílčích podkategorií, např. úlohy s aditivní strukturou (při řešení vyžadují užití operací sčítání či odčítání), úlohy z rovinné/prostorové geometrie apod. Je zřejmé, že jedna úloha může patřit do více typů. Typické jsou úlohy kombinatorického charakteru, které obvykle zasahují do několika oblastí matematiky. Také můžeme vzhledem k jistému kontextu danému učebnicí mluvit o úlohách netradičních (tedy takových, které vyžadují do jisté míry netradiční a nestandardní postupy pro řešení).

Úlohy použité v této práci jsou svojí podstatou úlohy geometrické, a to jak z oblasti rovinné geometrie, tak z prostorové geometrie, mnohdy však s přesahem do dalších oblastí matematiky.

2.2.2 Typologie úloh z didaktického hlediska

Typologii úloh z didaktického hlediska popisuje Jirotková (2010) především v prostředí čtverečkovaného papíru. Její dělení je však možné aplikovat na kteroukoliv oblast školské matematiky, toto dělení jsem použila i pro klasifikaci úloh používaných v průběhu mé práce při popisu jednotlivých výukových experimentů (volně kráceno).

Jirotková (2010) uvádí:

Z hlediska didaktických cílů lze (matematické) úlohy zaměřené na žáka/studenta dělit na:

(1) výukové
(2) diagnostické
(3) reedukační

Cílem výukové úlohy (1) je obohatit zkušenosti a znalosti žáka/studenta o další poznatky, rozvíjet jeho kognitivní a metakognitivní schopnosti. Tyto úlohy lze dále klasifikovat podle konkretizace cílů výuky na úlohy seznamovací (uvádí žáka do činnosti, kterou získává první zkušenosti s jistým pojmem), úlohy objevné (jejich řešení vede k odhalení jistého jevu, který bývá spojen s překvapením), úlohy komunikační (vyvolávají komunikační problém), úlohy konstrukční (v průběhu jejich řešení žák/student najde konečnou posloupnost kroků, kterou nazýváme konstrukcí), úlohy mapovací (předpokládá nalezení všech objektů dané vlastnosti), úlohy optimalizační (předpokládá nalezení optimálního prvku v souboru daných objektů), úlohy vyhledávací (úkolem je nalézt prvek předepsaného typu v daném souboru), úlohy revizní (úkolem je prověřit, zda je splněno předepsané kritérium), úlohy argumentační (je nutno zdůvodnit, zda je splněn předepsaný požadavek), úlohy na hledání strategie (hledání optimální strategie souvisí s myšlenkovým procesem, při němž dochází ke změně strategie řešení) a úlohy nácvikové (při jejich řešení se upevňuje a automatizuje již známá procedura). Vhodnou úlohou pro konstruktivisticky orientovanou výuku je úloha, která je pro řešitele nestandardní, tedy takové, na jejíž řešení musí řešitel vynaložit jisté intelektuální úsilí, která není řešitelná předem naučenými strategiemi, je k řešiteli vstřícná a má nastavitelnou obtížnost.

Cílem diagnostické úlohy (2) je poznat určitou část (meta)kognitivní struktury zkoumaného žáka. Učitel může diagnostikování využívat přinejmenším ve třech různých směrech:

- jako zpětnou vazbu, kterou žáci/studenti poskytnou a která vypovídá o kvalitě předchozí výuky,
- jako mapování existujícího stavu zvolené oblasti kognitivní struktury žáků/studentů se zaměřením na volbu koncepce dalšího výukového procesu, na odhalení zóny nejbližšího matematického rozvoje žáka (Vygotskij, 1976),
- na odhalení nedostatků v žákově/studentově kognitivní struktuře se záměrem budoucích reedukačních zásahů.

Při zadávání diagnostických úloh si učitel pokládá otázku „Proč?“, čímž formuluje diagnostický jev**.** Odpovědí na položenou otázku formuluje diagnostický klíč. (Jirotková, 2010, s. 210 – 230). Ten podává nejen vysvětlení zmíněných jevů, ale také reedukační zásahy.

2.2.3 Typologie úloh z metakognitivního hlediska

V běžném vyučování, ale zejména v konstruktivisticky (viz kapitola 2.3) vedeném vyučování, se žák/student podle Jirotkové (2010) dostává do kontaktu s řešenou úlohou ve čtyřech různých sociálních kontextech:

- individuální kontakt I. – žák se dostává do prvního kontaktu s řešenou úlohou,
- skupinový kontakt – výsledky jednotlivců jsou diskutovány ve skupinách,
- kolektivní kontakt – učitel řídí diskuzi celé třídy a důležité myšlenky se objevují na tabuli,
- individuální kontakt II. – dodatečné „řešení“ úlohy v domácím prostředí.

Při každém z výše uvedených sociálních kontextů dochází k řešitelským činnostem a procesům učení se.

2.3 Konstruktivizmus a vyučování orientované na budování schémat

„Konstruktivizmus je směr druhé poloviny 20. století, který zdůrazňuje aktivní úlohu člověka, význam jeho vnitřních předpokladů a důležitost jeho interakce s prostředím a společností“ (Hartl, Hartlová, 2000). O konstruktivismu již bylo mnoho napsáno, neboť konstruktivistické pojetí výuky je dnes diskutováno téměř v každé práci z didaktiky matematiky. Z toho důvodu si dovolím jen několik poznámek a odkazů, relevantních k zaměření mé práce.

2.3.1 Různé směry konstruktivizmu ve světové i české literatuře

Myšlenka konstruování vlastních poznatků pochází zřejmě od Sokrata, který vedl své diskuzní partnery k poznání tím, že jim kladl dobře promyšlené otázky. Konstruktivismus nelze považovat za jasně vymezenou a neměnnou teorii, ale naopak za vyvíjející se pedagogický směr, který můžeme nalézt v různých obměnách u autorů mnoha konstruktivistických teorií. V literatuře (Glasersfeld, 1995) je popsán např. *radikální konstruktivizmus*, kdy jeho stoupenci považují pravdu za důsledek společenského konsensu a nepřipouštějí možnost „objektivní“ pravdy (Stehlíková, 2004). Dalším směrem, popsaným především v psychologii, je *kognitivní konstruktivizmus*. Základy tohoto proudu můžeme vysledovat v pracích klasiků, jakými byli Piaget (1985) nebo Dewey (1932). *Sociální konstruktivizmus* popisuje v české literatuře Kalhous (2002), který navazuje na práci Vygotského a uvádí, že „učení … je proces zároveň osobní i sociální, který nastává, když jedinci spolupracují na budování (konstrukci) sdílených společných porozumění a významů“ (Kalhous, 2002, s. 55).

Myšlenky konstruktivizmu přináší do české didaktiky matematiky zejména M. Hejný a F. Kuřina (1998, 2001, 2009), kteří přetvářejí obecné konstruktivistické zásady v didaktický konstruktivizmus s ohledem na specifika didaktiky matematiky. Formulují deset zásad, kde se odráží jejich konstruktivistický přístup k vyučování. (Hejný, Kuřina, 2009, s. 160-161, zkráceno podle Stehlíkové, 2004):

1. Matematika je chápána jako specifická lidská aktivita, ne jen jako její výsledek.
2. Podstatnou složkou matematické aktivity je hledání souvislostí, řešení úloh a problémů, tvora pojmů, zobecňování tvrzení, jejich prověřování a zdůvodňování.
3. Poznatky jsou nepřenosné, vznikají v mysli poznávajícího člověka.
4. Tvorba poznatků se opírá o zkušenosti poznávajícího.
5. Základem matematického vzdělávání je vytváření prostředí podněcujícího tvořivost.
6. K rozvoji konstrukce poznatků přispívá sociální interakce ve třídě.
7. Důležité je použití různých druhů reprezentace a strukturální budování matematického světa.
8. Značný význam má komunikace ve třídě a pěstování různých jazyků matematiky.
9. Poznávací proces je nutno hodnotit minimálně ze tří hledisek: porozumění matematice, zvládnutí matematického řemesla, aplikace matematiky.

10. Poznání založené na reprodukci informací vede k pseudopoznání, k formálnímu poznání.

Konstruktivistická metoda vyučování tedy spočívá v přesvědčení, že za své učení musí přebírat více zodpovědnosti sami žáci. Učitel jim k tomu poskytuje zajímavé úlohy, které jsou pro ně výzvou. Při jejich řešení žáci používají dříve získané znalosti a zkušenosti z běžného života, čímž dojde k tvorbě hypotéz či dohadů, které dalším postupem potvrzují nebo vyvracejí. Nepostupují tedy podle předem daného algoritmu. Na otázku položenou žákem učitel nepodá odpověď, ale reaguje jinou otázkou, která žákovi napoví nebo ho vhodně nasměruje. Jeden z rysů tohoto způsobu vyučování spočívá v tom, že si učitel nemůže detailně naplánovat, co se v hodině stane. Příliš detailně naplánovaná hodina nutí učitele sledovat svůj plán, místo aby se zabýval nápady, s nimiž žáci přicházejí. (Hejný, Littler, 2007)

2.3.2 Vyučování orientované na budování schémat

M. Hejný (2014) navázal na práci svého otce a rozpracoval se svými spolupracovníky vyučovací metodu založenou na konstruktivistickém edukačním stylu a která je zaměřená na budování mentálních schémat matematických pojmů, vztahů, situací, procesů v hlavách dětí.

Vyučování orientované na budování schémat (VOBS) stojí na dvou pilířích: na učiteli a na učivu uchopeném sítí úloh vložených do didaktických prostředí (viz kapitola 3). Role učitele a jeho edukační styl jsou do značné míry určeny vlastní osobností učitele, jeho pedagogickým a didaktickým přesvědčením. Edukační styl, který vyžaduje účinná metoda VOBS, lze charakterizovat souborem zásad (Hejný, 2014, s. 127, kráceno)

1) Učitel vytváří optimální pracovní klima: žádný žák není frustrován, žádný se nenudí.
2) Učitel ponechává žákům prostor pro jejich úvahy, nepodsouvá jim svoje postupy a pomocné otázky dává, až když jsou žáci v koncích. Učitel nevstupuje do žákova myšlenkového pochodu.
3) Učitel vede žáky ke vzájemným diskuzím, ať už ve dvojici, malých skupinách, nebo v rámci celé třídy. Při moderování diskuze se nepřiklání k žádnému názoru, nekomentuje správnost úsudku, naopak podporuje různost názorů.
4) Učitel dává žákům přiměření úlohy: každý žák řeší úlohu, která odpovídá jeho schopnostem. Vhodné jsou úlohy, které připouštějí jak rychlé, tak i pomalé řešitelské postupy.

5) Vlastním přístupem k matematice vede žáky k potřebě rozumět matematice. Vysoce hodnotí tvůrčí práci žáků, nikoliv rychlost, reprodukci ani imitaci.
6) S chybou žáka pracuje učitel promyšleně, vede žáka k tomu, aby sám vlastní chybu odhalil, a aby odhalil i její příčiny.

Učitel, který coby žák byl odchován tradiční matematikou a později i v tomto duchu začal učit, musí překonávat mnohé stereotypy, když chce aspoň v jisté míře naplnit výše uvedené zásady. Učitelé, kteří přestanou žákům učivo vysvětlovat a vedou je k samostatnému odhalování matematiky, však shodně tvrdí, že jim ke změně pomohli žáci, jejich nadšení a překvapivá schopnost odhalovat matematiku. (Hejný, 2014)

Na principech VOBS je založena a rozpracována Hejného vyučovací metoda, která spočívá v tom, že žáci odhalují matematiku systematickou prací v mnoha navzájem propojených didaktických matematických prostředích (podrobněji viz kapitola 3.2). Tato prostředí provázejí výuku matematiky na celém prvním stupni, připravena je i návaznost pro další vzdělávací stupně (II. stupeň a středoškolská výuka).

Metoda VOBS odpovídá i mému profesnímu přesvědčení (viz 1. kapitola), kdy jsem se od instruktivního stylu dostala až k VOBS a Hejného vyučovací metodě, a kdy se ve své výuce snažím naplňovat všechny výše uvedené zásady.

Z celé řady konkrétních výukových situací jsem vybrala několik konkrétních experimentů, které jsem zpracovala jako jednotlivé případové studie. Společným znakem každé z nich je jedna konkrétní geometrická oblast z jednoho konkrétního geometrického prostředí.

2.4 Případová studie

Při plánování svého výzkumu, v době kdy jsem přemýšlela o základních podmínkách, ve kterých se bude realizovat, jsem se seznámila s různými možnostmi jak plánovat a organizovat výzkum, jaké metody výzkumu lze volit vzhledem k formulaci výzkumné otázky - designu kvalitativního výzkumu. Seznámila jsem se s různými již zavedenými označeními, ke kterým se hlásí určitý okruh autorů. Existují metodologické publikace, které je popisují (Švaříček, Šeďová, 2007).

K jednomu ze základních výzkumných designů v pedagogických vědách patří případová studie, která nejvíce odpovídala představám o tom, jak chci při své práci postupovat. Případová studie se zaměřuje na podrobný popis a rozbor několika málo případů, přičemž základní výzkumnou otázkou jsou specifické charakteristiky těchto případů (Hendl, 2005).

Kromě případové studie je v současné literatuře velmi rozšířeno zpracování kvalitativního výzkumu na základě zakotvené teorie, která však nevyhovovala mým potřebám, neboť základním cílem zakotvené studie je generovat nějakou novou teorii, nikoliv popsat singulární jevy, jako je tomu u případové studie (Švaříček, Šeďová, 2007).

Podstatou případové studie je snaha o detailní zachycení jednoho případu, přičemž se předpokládá, že důkladným prozkoumáním tohoto případu lépe porozumíme jiným podobným případům. Mezi jednotlivými autory různých případových studií nepanuje vždy naprostá shoda. Za dva protikladné, i když hlavní, proudy je možné považovat přístupy, které navrhli jedna Stake (1995) a jednak Yin (1994).

Stake začínal jako psychometrik a případovou studii definuje jako „…úsilí o porozumění určitému sociálnímu objektu v jeho jedinečnosti a komplexitě“ (Stake, 1995, s. 2). Sociální objekt je pro něj tedy „…integrovaným systémem, jehož části nemusí dobře pracovat, jehož účel může být iracionální, ale přesto se jedná o systém. Případová studie vypráví historii tohoto systému.“ Od kvalitativně orientovaného výzkumu podle něj očekáváme zdůraznění reality a holistické pojetí.

> „Fenomény jsou vzájemně složitě propojené časově souslednými akcemi a jejich pochopení vyžaduje uvažovat jejich kontext: časový, prostorový, ekonomický, kulturní sociální a osobní. Případ, aktivitu, událost považujeme za cosi jedinečného i obecného. Porozumění případu vyžaduje porozumět jiným případům, aktivitám, událostem a jejich jedinečnosti. Uznání jedinečnosti nespočívá v porovnání případu s normou pomocí hodnot vybraných proměnných, ale v přístupu, jímž ho přiblížíme čtenáři a který vyzdvihne význam případu, jeho neopakovatelnost, kritickou jedinečnost. Čtenáře na to upozorníme vyprávěním, realistickými a analytickými obrázky a informacemi o zkušenostech výzkumníka. Množina vlastností a posloupnost událostí v případu se považují za jedinečné. Uznání této jedinečnosti je předpokladem pro pochopení daného případu. (Stake, 1995, s. 43)“

Stake dále požaduje, aby se v dané případové studii:

1. určil případ, objekt výzkumu a vyjasnila jeho konceptualizace;
2. zvolily studované jevy, témata nebo problémy (tedy výzkumné otázky);
3. hledaly pravidelnosti v datech, jež by měly vztah k položeným otázkám;
4. vzájemně doplňovala klíčová pozorování a datový základ intepretace;
5. vybraly alternativní interpretace, které se budou zkoumat a porovnávat;
6. navrhla základní tvrzení a zobecnění platná pro daný případ.

Stake dále uvádí, že při prováděném výzkumu se snažíme o neintervenční a empatickou činnost, tedy nerušíme normální aktivity v případu, ale diskrétně pozorujeme a zkoumáme příslušnou dokumentaci. Nakonec dáváme větší váhu interpretacím výzkumníka než interpretacím sledovaných lidí (Stake, 1995).

Yin studoval historii a jistý čas se zabýval experimentální psychologií z oblasti výzkumu mozku. Svými metodologickými úvahami podstatně přispěl k rehabilitaci tohoto konceptu, definoval případovou studii jako strategii pro zkoumání předem určeného jevu v přítomnosti v rámci jeho reálného kontextu. Přístup Yina vychází spíše ze zásad vědeckého realismu než z konstruktivismu. Validitu studie hodnotí pomocí kritérií, která vycházejí z kritérií kvality známých z kvantitativního výzkumu (konstruktová validita, interní validita, externí validita, reliabilita). Podle něj má mít případová studie tyto charakteristiky:

- využívá více zdrojů dat kvantitativního i kvalitativního charakteru;
- musí se vypořádat se situací, že je obvykle více proměnných než naměřených datových bodů, tedy realizací uvažovaných proměnných;
- snaží se využít předchozí teoretická tvrzení, která usměrní sběr dat a jejich analýzu (Hendl, 2005).

Přístup každého z jednotlivých autorů má své přednosti i nedostatky. Mezi přednosti případových studií patří skutečnost, že výsledky jsou srozumitelné širšímu spektru zájemců, zachycují unikátní vlastnosti, faktory nebo okolnosti zkoumaného problému. Výsledky studií jsou velmi pevně zakotveny v realitě, poskytují vhled do jiných situací, které mají stejné či velmi podobné vlastnosti jako zkoumané případy. Mohou být vykonávány samotným výzkumníkem a mohou zkoumat i případy, kde nad jednotlivými proměnnými nemáme žádnou kontrolu a kde se vyskytuje mnoho nepředvídatelných jevů a událostí. Mezi nedostatky můžeme zařadit fakt, že výsledky jsou obtížně zobecnitelné na širší vzorky. Není jednoduché provádět techniky ověřování spolehlivosti, neboť studie jsou založeny na subjektivních interpretacích. Případové studie mají sklon ke zkreslení způsobeným zaujatostí výzkumníka (Švaříček, Šeďová, 2007).

Požadavkům a podmínkám mé práce vyhovuje spíše přístup, který představil Stake a který na konkrétních situacích ukážu ve 4. kapitole. Za případovou studii budu považovat tedy situaci, která má následující kritéria:

- popisuje konkrétní didaktickou situaci, která se odehrála při výuce v mé třídě na FZŠ Táborské v období od září 2010 do prosince 2014
- týká se konkrétního matematického/geometrického tématu

- popisuje historii vývoje určitého úzce vymezeného pojmu/objektu/vlastnosti v poznávacím procesu
- důkladné prozkoumání jednoho případu mi umožní lépe porozumět jiným obdobným situacím při další pedagogické praxi

Vzhledem k tomu, že uvádím čtyři různé případové studie z historie jedné třídy, mohu hovořit o mnohopřípadové studii v rámci dlouhodobého kvalitativního výzkumu.

3 Metodologie

Předložená disertační práce byla zpracována jako výsledek kvalitativního výzkumu založeného na dlouhodobém a systematickém sledování vlastní pedagogické praxe. V souladu s významným metodologem (Creswell, 1998, s. 12) chápu kvalitativní výzkum takto:

> „Kvalitativní výzkum je proces hledání porozumění založený na různých metodologických tradicích zkoumání daného sociálního nebo lidského problému. Výzkumník vytváří komplexní, holistický obraz, analyzuje různé typy textů, informuje o názorech účastníků výzkumu a provádí zkoumání v přirozených podmínkách.“

Podle použité metody sběru dat je možné předložený výzkum považovat za longitudinální, tedy takový, který zahrnuje sledování stejné skupiny jednotlivců po delší časové období.

V této kapitole podrobně popíšu metody sběru, archivace a vyhodnocení získaných dat. Dále představím matematický obsah, na němž bude poznávací proces žáků v geometrii zkoumán. Provedu didaktickou analýzu vybraných úloh z jednotlivých podnětných geometrických prostředí. Uvedu také charakteristiku účastníků výzkumu včetně časového harmonogramu.

3.1 Metody sběru, archivace a vyhodnocení dat

Dlouhodobý a systematický výzkum jsem zahájila v srpnu 2010, kdy jsem získala možnost výuky matematiky ve třídě prvního ročníku jedné základní školy v Praze 4. Obsah výuky byl vázán schváleným ŠVP konkrétní školy, který odpovídá obecným kurikulárním dokumentům (RVP).

Plánování výuky vycházelo z časového harmonogramu jednotlivých ročníků. Tento roční harmonogram jsem rozpracovala vždy nejprve rámcově na celý týden. Podrobný scénář na nejbližší hodinu (Příloha 01) vycházel z tohoto rámcového rozpracování, ale vždy byl průběžně upravován po prvotní reflexi předchozí hodiny. V každém scénáři jsem kladla velký důraz na diferencovaný přístup k jednotlivým žákům. Téměř každá hodina byla audiovizuálně zaznamenána. Videokamera byla umístěna na pevném stativu a většinou s ní nebylo v průběhu hodiny manipulováno. Po každé hodině jsem provedla nejprve stručný záznam do pedagogického deníku (Příloha 02), po zhlédnutí videozáznamu sebereflexi výuky, někdy i společně s dalšími didaktiky matematiky. Následně jsem často modifikovala scénář na další hodinu.

V prvním ročníku jsem odučila celkem 159 vyučovacích hodin při týdenní dotaci 4,5 hodiny, z toho bylo 131 hodin audiovizuálně zaznamenáno. Z hodin, které nemohly být takto zaznamenány, jsem provedla velmi podrobný písemný záznam. Důvodem pro nenahrávání některých hodin byla jednak počáteční absence písemného souhlasu všech rodičů a jednak technické problémy. Ve druhém ročníku jsem odučila 184 hodin (179 se záznamem), ve třetím ročníku 192 hodin (181 se záznamem) a ve čtvrtém ročníku 188 hodin (171 se záznamem). Ve druhém, třetím a čtvrtém ročníku byla týdenní dotace navýšena na 5 hodin. Důvodem pro absenci audiovizuálního záznamu byly již pouze technické problémy se záznamovým zařízením. Tedy celkem mám nahráno 662 hodin od prvního do čtvrtého ročníku stejné skupiny dětí. Způsob archivace těchto záznamů uvádím podrobně níže.

Jak už jsem uvedla v předchozí kapitole, mým cílem bylo sledovat, jak děti na počátku školní docházky konstruují geometrické poznatky, jak využívají své dosavadní zkušenosti při výuce, a jaká vymezení, tvrzení, vztahy a zákonitosti jsou schopny formulovat a používat bez ohledu na očekávané výstupy odpovídajícího období školního vzdělávání.

Z výuky byly získány rozličné výzkumné materiály, které jsem průběžně archivovala jak v písemné, tak především v elektronické podobě. V písemné podobě je archivován pedagogický deník a autentické písemné materiály žáků, a to jak z individuální, tak především ze skupinové práce. Pro potřeby snadné orientace v elektronických materiálech jsem vyvinula systém kódování jednotlivých materiálů. Každý konkrétní materiál je označen několikastupňovým označením. Jedná se nejprve o označení třídy, v jejímž ročním plánu byl materiál pořízen, poté je uveden kalendářní rok, měsíc a den pořízení záznamu. Následuje označení, zda se jedná o týdenní program (TP), scénář hodiny (SH), videozáznam (V), transkripce hodiny (T) nebo vlastní sebereflexe (SR). Některé písemné materiály žáků byly převedeny do elektronické podoby, a pak byly označeny jako scany (S) se jménem konkrétního žáka. Například označení 1.B_2010_12_01_V znamená, že 1. prosince 2010 byl pořízen ve třídě 1. B proveden videozáznam hodiny.

Přehled získaných materiálů:

Písemné materiály:	pedagogický deník
	pracovní listy žáků (individuální práce, skupinová práce)
	pracovní učebnice žáků
Elektronické materiály:	rámcový týdenní program
	scénář hodiny
	videozáznam hodiny
	transkripce videozáznamu

sebereflexe z výuky
písemné práce žáků

V pravidelných časových intervalech jsem všechny materiály dvoufázově archivovala. Jedenkrát týdně nejprve do pracovní paměti osobního počítače, jedenkrát měsíčně bylo vše ještě archivováno na externí harddisk.

Ve vyučování jsem od samého začátku aplikovala Hejného vyučovací metodu a přistupovala k výuce v souladu s principy konstruktivismu. Takto vedená výuka splňovala předpoklady výuky orientované na budování matematických schémat (Hejný, 2007). To mi umožnilo používání učebnic matematiky autorů Hejný a kol. (2007-2011). Matematické poznatky jsou prostřednictvím takto postavené výuky budovány prostřednictvím mnoha navzájem propojených podnětných výukových prostředí. Pro potřebu této práce jsem se zaměřila na geometrická prostředí Krychlové stavby, Origami, Dřívková matematika, Parkety a tematický celek Obvod a obsah rovinného útvaru. Zaměřila jsem se na některé situace, kdy žáci řešili úlohy v těchto prostředích. Úlohy jsem vybírala převážně z učebnice, některé jsem doplnila. Didaktická analýza vybraných úloh bude podrobně uvedena v následujícím textu.

Při vyhodnocování získaných dat (především videonahrávek) jsem měla na paměti slova M. Chrásky (Chráska 1994, s. 5) že, „při kvalitativním přístupu jde spíše o charakteristiku jedinečnosti různorodých prvků, zatímco při kvantitativním přístupu se postihuje četnost stejnorodých prvků.“ Cílem tedy bylo systematicky sledovat jednotlivé výukové situace, analyzovat je a zařadit je do odpovídající fáze poznávacího procesu (a případně reagovat přizpůsobením dalšího scénáře hodiny). V průběhu čtyř let jsem se pak snažila vyhledat a propojit takové situace, které se týkaly stejného nebo velmi podobného geometrického jevu.

3.2 Schéma a jeho vazba na didaktická prostředí

Vyučování orientované na budování schémat (VOBS) označuje Hejný (2014, s. 81) jako „…edukační styl, který usiluje o maximálně autonomní poznávací proces žáka. Tento styl je zaměřený na budování matematických schémat žáků.“ Pojetí pojmu schéma v didaktice matematiky se věnuje mnoho autorů, mému chápání je nejbližší pojetí Hejného (Hejný, 2007), který vychází z interpretace amerického psychologa R. J. Gerriga (1991), schéma prostupuje nejen výukou matematiky, ale i lidským myšlením a každodenním konáním. Hejný rozpracoval (Hejný, 2007 a 2014) šest základních tezí o schématu, se kterými souzním a které jsou pro mne východisky pro můj přístup k výuce. U každého bodu cituji nejprve originální znění autora a pak si ověřuji porozumění jednotlivým tezím uvedením konkrétních ilustrací z vlastního rodinného života. Jedná se o tyto teze (Hejný, 2014, s. 90-91):

„T1. Schémata pomáhají člověku orientovat se v životě.“

> *V naší domácnosti se o veškeré nákupy vždy stará manžel. Ve své mysli má uloženo schéma nákupního centra, kde pravidelně obstarává týdenní nákupy a proto mu stačí k výběru všech položek nákupního seznamu jen asi 30 minut, navíc potřebuje mít zapsány jen ty položky, které se neopakují pravidelně. Pokud z nějakého důvodu jsem nucena obstarat nákup já, potřebuji k vyřízení téhož nejméně dvojnásobek času, protože každou položku musím nejprve najít a často se vracím do uliček, kde jsem již jednou byla.*

„T2. Schémata se utváří většinou spontánně jako důsledek potřeb člověka. Kde potřeba schází, schéma se nevytvoří.“

> *Přestože se manžel vyzná v obchodním domě, v naší vlastní kuchyni často není schopen nalézt suroviny, o kterých ví, že je zakoupil. Úklid nákupu si obstarávám já podle systému, který se zcela liší od systému v obchodě, protože vyhovuje mým potřebám při přípravě pokrmů. Já mám tedy ve své mysli schéma polic s uloženými surovinami. Manžel nemá potřebu vyznat se v kuchyni, neboť nepřipravuje pokrmy, dokonce se ani nestará o uložení potravin na odpovídající místa po nákupu. Například pro uchování sladkostí využívám nejvyšší polici, aby k nim nikdo neměl snadný přístup, navíc je ukládám za rezervní balíčky s moukou. V obchodě jsou naopak tato lákadla vždy uložena na viditelném místě v úrovni očí.*

„T3. Schémata téhož výseku reality uložená ve vědomí různých lidí se liší. To může být příčinou nedorozumění.“

> *Jedním velkým nedorozuměním, které je způsobené realitou různě uloženou v našem vědomí, je nákup piva. Pokud já oznámím, aby tentokrát nezapomněl koupit pivo, znamená to, že mám v úmyslu připravit k obědu obalované řízky, kdy do vajíčka dávám pivo. Manžel má představu, že se pivem bude zapíjet oběd. Většinou koupí nějakou zvláštní značku, kterou mi pak odmítá poskytnout do trojobalu.*

„T4. Lidé, kteří společně řeší nějaký problém, mohou ve vzájemné interakci dospět k lepšímu řešení, než by došel každý sám. Navíc člověk, který má vědomost o schématech jiných lidí, může jejich znalosti a rady vyžívat.“

> *Společně jsme v poslední době řešili nákup zahradního grilu, kdy pro manžela byla podstatná technická stránka přístroje, ale pro mě bylo důležitá možnost čištění v myčce. Kompromisem jsme zvolili takový přístroj, který splňoval obě představy.*

„T5. Prvky, které vstoupily do schématu s nízkým zvědoměním a nízkou frekvencí, zanikají rychle. Prvky, které vstoupily s vysokým zvědoměním a vysokou frekvencí, přetrvávají dlouho."

V mé původní rodině se často vařila specifická bramborová polévka, kterou mě učila babička již v pubertě. Přestože ji nepřipravuji často, znám pracovní postup i potřebné ingredience zpaměti. V původní rodině mého manžela se pekl tažený závin, který jsem se sice také naučila, ale vždy se musím podívat do knihy receptů na přesný poměr jednotlivých složek. Přesto však nikdy nemám tak výborný závin, jako babička.

„T6. Prvky schématu, které člověk používá zřídka, je nutno mít v dostupné externí paměti, aby byly v případě potřeby k dispozici. Externí paměť uvolňuje kognitivní energii na realizaci náročnějších úkonů."

Externí pamětí je pro mě právě výše zmíněná kniha receptů, protože své schéma pečení taženého závinu omezuji jen na sezónu letních jablek, kdy jsem ochotna trávit v kuchyni delší čas.

Jako učitelka (matematiky) usiluji v každodenní praxi, abych dětem vytvářela podmínky pro budování mentálních schémat, která jim pomohou orientovat se v matematice, ale nejen v matematice. Je klíčové, aby žáci měli matematiku rádi, aby rádi řešili matematické problém, aby se nebáli se pustit do úlohy nového typu, tedy aby měli zdravé intelektuální sebevědomí. Jsem si vědoma, že v mysli různých dětí mohou vznikat různá schémata týkající se jistého výseku matematické reality, zařazuji proto takové formy práce, kdy je nutné spolupracovat, diskutovat, posuzovat řešení spolužáků a tak se seznamovat s celou škálou různých řešení a rozšiřovat tak své zkušenosti. Je zřejmé, že nutnou podmínkou pro výuku orientovanou na budování schémat (VOBS) je vést ji konstruktivisticky a nabízet žákům vhodně didakticky zpracovaný materiál. Jako velice efektivní se ukázalo pracovat v podnětných matematických prostředích.

3.3 Podnětná matematická prostředí

Nositelem matematického obsahu je ve vyučování orientovaném na budování schémat (VOBS) škála podnětných matematických prostředí. Termín *Didaktické matematické prostředí*[2] (angl. *Substantial learning environment)*, který byl do odborné literatury zaveden Erichem Wittmannem v roce 2001 jako „substanzielle Lernumgebung" cituje také M. Tichá (Tichá, 2010, s. 299) jako „…výukový celek s následujícími vlastnostmi: Představuje ústřední

[2] Ve stejném významu je používán i termín Podnětná matematická prostředí

cíle, obsahy a principy výuky matematiky na dané úrovni. Týká se významných matematických obsahů, procesů a postupů. Je flexibilní a lze ho upravit podle konkrétních podmínek ve třídě. Spojuje matematické, psychologické a pedagogické aspekty výuky matematiky.“

Matematika a její výuková témata na úrovni primárního vzdělávání jsou v metodě Hejného zpracována do didaktických matematických prostředí. Rozlišuji tedy podle obsahu prostředí geometrická, a to ještě podle prostoru, ve kterém se pracuje, na 2D a 3D, a prostředí aritmetická, i když ani tato hranice není ostrá. Ty dále podle míry abstrakce pojmu číslo na aritmetická sémantická a strukturální. Jako sémantická jsou označována ta prostředí, ve kterých je číslo reprezentováno nějakým objekty z „reálného“ světa a tak tvoří a doplňují žákovu zkušenost.

Pojem Didaktické matematické prostředí budu používat v souladu s Hejným (2014) takto, „soubor vzájemně propojených pojmů, vztahů, procesů a situací, který dovoluje tvořit úlohy:

- umožňující žákům odhalovat hluboké matematické myšlenky,
- obdařené silným motivačním potenciálem,
- přiměřené žákům jak 1., tak i 2. stupně,
- s nastavitelnou obtížností.“ (Hejný, 2014)

3.4 Podnětná geometrická prostředí a jejich didaktická analýza se zaměřením na I. stupeň, propedeutika geometrických poznatků

V následujícím textu se budu podrobněji věnovat těmto čtyřem prostředím: Krychlové stavby (KS), Origami (O), Dřívková geometrie (D) i Parkety (P). Jednak ukážu, jak úlohy z každého prostředí odpovídají výše uvedeným charakteristikám, pokusím se zformulovat didaktický potenciál i didaktické nástrahy každého prostředí, dále uvedu konkrétní úlohy přiměřené pro různé věkové kategorie s uvedením schémat, do kterých daná úloha zasahuje, a které jsem používala při svém experimentálním vyučování. Původním mým záměrem bylo oddělit charakteristiky jednotlivých prostředí a v samostatné kapitole uvést jednotlivé úlohy, ke kterým se vztahují případové studie. Nakonec jsem zvolila propojení charakteristik s úlohami vloženými přímo do textu, neboť se domnívám, že to přispěje k lepší orientaci v textu. U každé úlohy uvádím nejprve její písemný kód (krychlové stavby KS, origami O, dřívka D, parkety P) a pořadové číslo, dále zda se jedná o úlohu převzatou nebo autorskou, u převzatých úloh uvádím zdroj ve formátu (M2/1/18/4).[3] Dále uvádím její užití z didaktického hlediska, tedy zda byla použita jako výuková, diagnostická, či reedukační, včetně cíle (podle RVP/ŠVP) patřícího k dané úloze. Poté uvádím její plné znění, případně použité modifikace včetně očekávaného žákovského řešení s vlastním komentářem.

Tato čtyři geometrická prostředí se zabývají poznáváním tvarů, jejich vlastností a vztahů, což můžeme označit za jeden proud školské geometrie. Druhým proudem je oblast míry, tedy určování obvodů a obsahů těchto tvarů. Tento tematický celek prostupuje všemi prostředími, přesto jej v kapitole 3.4.5 uvedu zvlášť.

Závěrečnou kapitolu této části budu věnovat vazbě jednotlivých prostředí na odpovídající kurikulární dokumenty včetně návaznosti na druhém stupni.

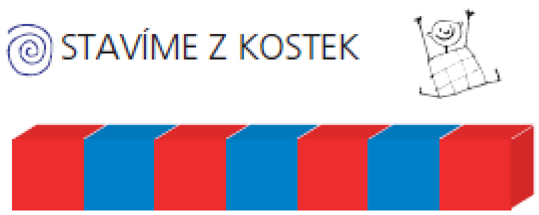
3.4.1 Krychlové stavby

Prostředí krychlových staveb vychází ze zkušeností dětí předškolního věku získaných hrou s kostkami nejrůznějších materiálů i velikostí. Dítě, které si rádo hraje s kostkami, staví nejrůznější stavby, a to i takové, které dle vymezení v (Jirotková, 2010, s. 49) krychlovými stavbami nejsou.[4] Prostředí je zavedeno v 1. ročníku nejprve jako hra, kde žáci získávají zkušenosti a rozvíjejí zručnost při stavbě různých objektů podle obrázků (např. věže, vláček, cimbuří, schodiště), nebo podle vlastní fantazie. Používají tedy ke svému vyjádření fyzický model krychlové stavby, případně její portrét. (Úloha KS_01)

Úloha KS_01 převzatá úloha: M1/1/10/hra výuková, diagnostická úloha

Cíl: Žák vytvoří fyzický model krychlové stavby zadaný jejím portrétem

Zadání:



Obrázek 2: Portrét krychlové stavby (Hejný a kol., 2007, Učebnice pro 1. ročník, 1. díl, s. 10)

[3] Učebnice matematiky Hejný a kol., 2. ročník/1. díl/strana 18/úloha 4
[4] Krychlovou stavbou rozumíme (Jirotková, 2010) prostorový objekt postavený z konečného počtu shodných krychlí tak, že začínáme položením jedné krychle na „podlahu“, k ní přiložíme druhou krychli přesně jednou stěnou na stěnu krychle první, a takto pokračujeme přikládáním dalších krychlí, dokud nevyčerpáme všechny připravené krychle.

Žáci rozvíjejí zručnost při hře s krychlemi. Učitel dětem sdělí pouze informaci: „Postavte vláček jako na obrázku v učebnici.“ Mezi diagnostické úlohy ji řadím proto, že sledováním pracovního postupu mohu diagnostikovat pracovní strategie jednotlivých dětí. Očekává se, že některé děti budou stavět systematicky, tedy vyberou červenou krychli, vedle umístí modrou krychli a pokračují tak dlouho, dokud nemají celý vláček. Jiné děti nejprve určí počet modrých a počet červených krychlí potřebných k postavení vláčku, poté střídáním barev vytvoří požadovaný rytmus barevných krychlí. Zdatnější děti mohou dostat další doplňující otázky týkající se celkového počtu použitých krychlí nebo porovnání počtu krychlí jednotlivých barev. Učitel může opět diagnostikovat, protože je možné podle chování jednotlivých žáků usuzovat, jak při práci uvažují. Někdo počítá po jedné a ukazuje si, někdo nepočítá, ale rovnou řekne, že červených je víc, protože vláček červenou začíná i končí. Na otázku, kterých krychlí je více, zda červených, či modrých, jedna žákyně hbitě postavila z použitých krychlí dvě jednobarevné věže, přisunula je těsně k sobě a pohledem určila, že červených je víc, protože „jedna červená čouhá tady nahoru.“ Úloha tedy zasahuje i do aritmetických schémat – číslo, nerovnost, parita čísel. Po ukončení samostatné práce dětí je žádoucí otevřít třídní diskuzi týkající se různých strategií při vlastní práci tak, aby jednotlivé děti měly možnost sdílet své právě nabyté zkušenosti. Součástí diskuze je i odpověď na doplňující otázky a jejich řešení.

Při manipulaci s krychlemi žák poznává některé průvodní jevy[5] krychle, učitel užívá správnou odbornou terminologii ve spojení s vlastní manipulací, čímž se terminologické pojmy dostávají do vědomí žáka zcela nenásilně a bez nutnosti jejich bližšího vysvětlování. Takto žák získává zkušenost s pojmy stěna, hrana a vrchol krychle, výška krychlové stavby jako počet podlaží, či objem tělesa jako celkový počet použitých krychlí. Při těchto činnostech se propojuje několik jazyků, kterými lze o krychlových stavbách komunikovat - fyzické modely a portréty a samozřejmě verbální jazyk používající mnoho metaforických vyjádření, jak např. vláček, věž …

Při další práci žák poznává a pokud možno i sám vytváří další jazyky pro popis krychlové stavby. Tvorba nového jazyka vychází z potřeby jednak vyjádřit, popsat, evidovat řešení jistých úloh, na které dosud používaný jazyk nestačil, a také vytvořit jazyk technicky snadný

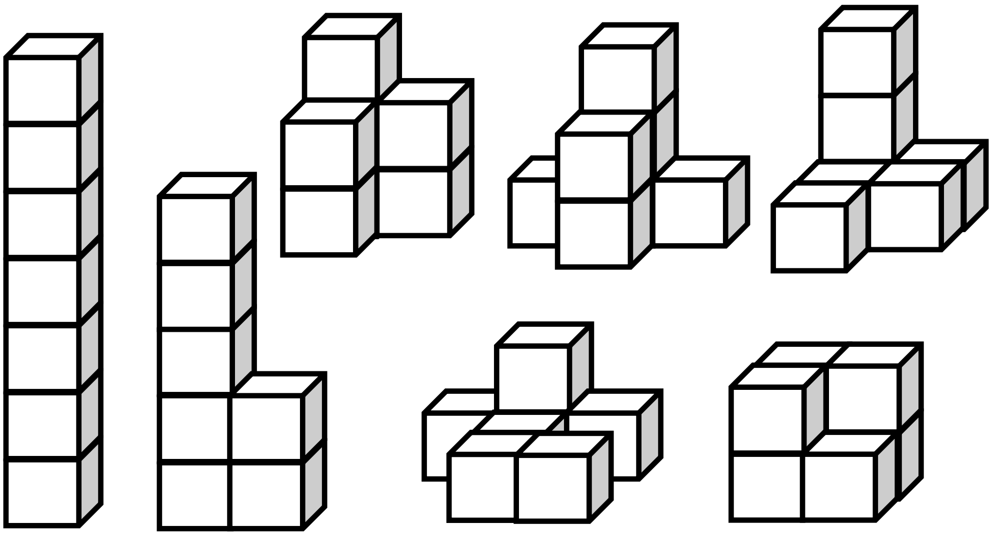
[5] Pojem zavedl P. Vopěnka (1998) jako jev, který danou osobnost provází a který bez ní ztrácí existenci (např. vrchol, hrana, stěna krychle jsou viditelné průvodní jevy, pokud krychli „umažeme“, jedná se o bod, úsečku, čtverec)

a srozumitelný. Takový jazyk dále umožní formulovat i řešit nové úlohy o krychlových stavbách na vyšší obtížnostní úrovni. Jedná se o plán stavby. (Úloha KS_02).

Úloha KS_02 autorská úloha výuková úloha

Cíl: Žák zaznamená model krychlové stavby pomocí jejího plánu

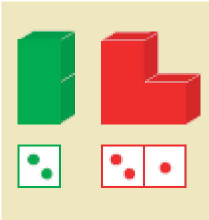
Zadání: Na chodbě je postaveno sedm různých krychlových staveb. Žáci vytvoří dvojice, kdy jeden z dvojice má za úkol vyběhnout na chodbu, prohlédnout si postupně všechny stavby, zaznamenat je na papír a písemně předat informaci druhému z dvojice. Ten musí pouze podle písemného záznamu postavit stejné stavby na lavici ve třídě. Při práci se nesmí ve třídě používat mluvené slovo. Vítězí ta dvojice, která má jako první postaveno na lavici všech sedm staveb.



Obrázek 3: Portréty krychlových staveb – úloha KS_02 (autorský obrázek)

Realizace: Žáci hledali jednoduchý, technicky snadný a srozumitelný jazyk pro evidenci krychlových staveb. Někteří žáci se u jednodušších staveb pokusili o znázornění portrétu, ale brzy pochopili, že to není efektivní. Změnili tedy strategii a znázorňovali stavby buď pohledem zepředu, nárysem (s označením podložky), nebo pohledem shora, půdorysem, do kterého doplnili čísla, pokud byly na daném místě alespoň dvě krychle nad sebou. Zvítězila dvojice, jejíž znázornění staveb se nejvíce blížilo plánu krychlové stavby. Po dokončení práce všech dvojic proběhla diskuze v rámci celé třídy, kdy většina dvojic prezentovala své postupy práce a zvolenou strategii. Případná nedorozumění mezi spolužáky vzniklá jako důsledek různých dosavadních zkušeností byla impulzem pro sjednocení způsobu znázornění krychlové stavby, a sice pomocí jejího plánu.

Plánem je popsána krychlová stavba jako koncept, jako hotový objekt. Počet teček nebo číslice ve čtverci pak vyjadřuje počet krychlí postavených nad sebou (obr. 4).



Obr. 4: Portrét a tečkovaný plán krychlové stavby (Hejný a kol, 2007, Učebnice pro 1. ročník, 1. díl, s. 28)

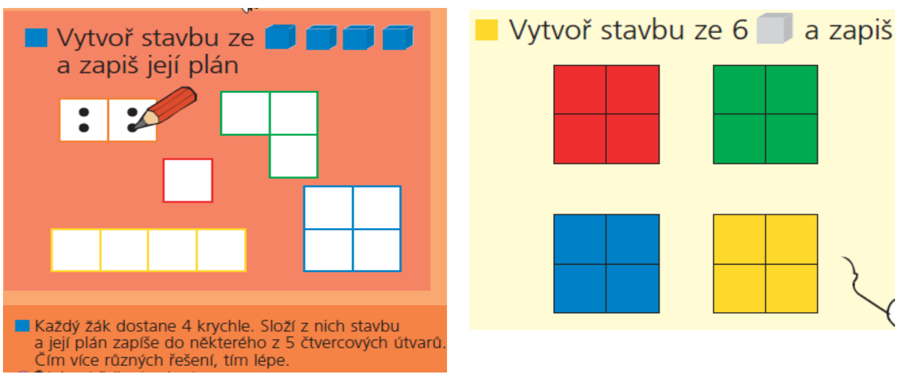
Jednou významnou oblastí matematiky, do které práce s modely, portréty i plány krychlových staveb zasahuje, je kombinatorika. Tedy některé aktivity v prostředí krychlových staveb přispívají i do schématu kombinatorika.

Úloha KS_03a převzatá úlohaM1/2/15/5 výuková úloha

Úloha KS_03b převzatá úlohaM1/2/21/4 výuková úloha

Cíl: Žák vytvoří stavbu daného objemu a zapíše ji plánem, hledá více/všechna řešení.

Zadání:



Obrázek 5: Kombinatorická úloha zadaná objemem pro 4/6 krychlí (Hejný a kol., 2007, Učebnice pro 1. ročník, 2. díl, s. 15 a 21)

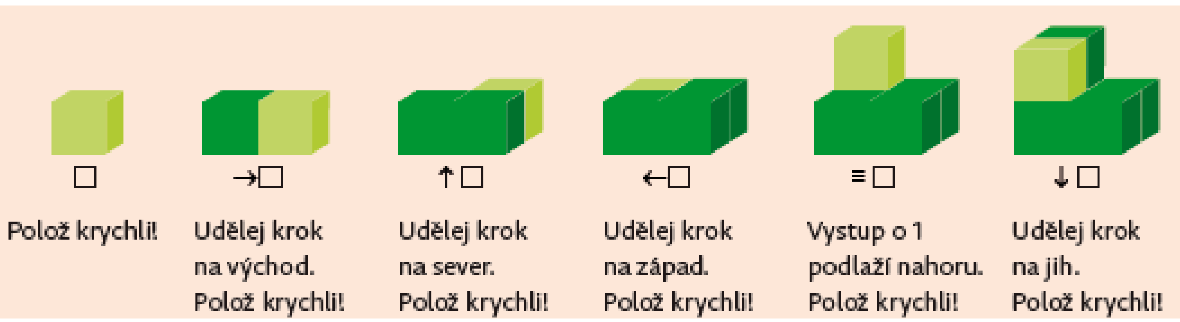
Žáci mohou uplatnit svoji kreativitu při tvorbě krychlových staveb zadaných počtem krychlí. Je možné očekávat, že některé děti budou trvat na podmínce zaplnění každého čtverce naznačeného půdorysu alespoň jednou krychlí. V tom případě je počet řešení u staveb ze čtyř krychlí omezen u červené, žluté a modré stavby na právě jedno řešení, u zelené stavby jsou dvě/tři řešení (záleží na tom, zda žáci budou považovat nepřímo shodné stavby za stejné či nikoliv). Pokud na uvedené podmínce nebudeme trvat, je řešení podstatně více. I zde je důležitá diskuze o tom, co je možné považovat za stavbu a co nikoliv. Pokud totiž do zeleného nebo modrého půdorysu postavíme krychle tak, že se dotýkají pouze jednou hranou, budou toto některé děti považovat za dvě samostatné stavby. Další problematická otázka spočívá v chápání počtu zadaných krychlí bez uvedeného kvantifikátoru. Některé děti zadání chápou tak, že je potřeba použít právě čtyři krychle, jiné uvažují o možnosti použít nejvýše čtyři krychle. U úlohy ze šesti krychlí je situace obdobná, navýšením objemu dojde pouze k navýšení celkového počtu řešení.

Při řešení úlohy b) upravené pro skupinovou práci, kdy nebyl zadán tvar půdorysu, došlo u jedné skupiny (u jednoho žáka) k velmi rychlému nalezení všech možných řešení. Při společné diskuzi prokázal schopnost systematického prohledávání bez nutnosti vizualizace.

Při popisu krychlové stavby fyzickým modelem, portrétem či plánem žáci využívají hovorového jazyka doplněného o některé geometrické pojmy – stěna, hrana, vrchol, výška stavby, celkový počet použitých krychlí.

Pro hluboké porozumění krychlovým stavbám je potřeba k nim přistupovat z co nejvíce stran a řešit co nejkvětnatější paletu úloh. Dosud uvedené úlohy pracovaly s krychlovou stavbou jako s konceptem, jako s hotovým, neměnným objektem. Nyní budeme pracovat s krychlovou stavbou, která je v procesu tvorby nebo přestavby a tento proces budeme evidovat. Evidence se může uskutečňovat ne příliš pohodlným jazykem, technicky náročným, ale dobře srozumitelným - animace portrétů (viz obrázek 6) a také technicky jednodušší, ale méně srozumitelnou animací plánů. Kromě procesů transformace jedné stavby na jinou, lze také popsat konstrukci stavby. Tento jazyk vzniká z potřeby zjednodušit těžkopádný zápis konstrukčního procesu. Tvorbu nového jazyka je důležité maximálně přenést na žáky.

Dalším statickým jazykem, kterým je možné zobrazit krychlovou stavbu, je jazyk tří pravoúhlých průmětů. Jazyky uvedené v tomto odstavci uvádím jen pro úplnost, ale v dalším textu se jimi nezabývám.



Obrázek 6: Ikonický zápis konstrukce krychlové stavby (Hejný a kol., 2010, Učebnice pro 4. ročník, s. 51)

Didaktický potenciál prostředí KS (krychlových staveb)

Žák *poznává vlastnosti krychlových staveb* manipulativní činností. Manipulativní činnost užitá k řešení různě obtížných úloh je charakteristickým znakem všech manipulativních prostředí. Slovním popisem uskutečňované činnosti a zavedením smysluplných znakových jazyků vhodných i pro popis složitějších krychlových staveb žáci přirozeně proměňují své intuitivní zkušenosti o krychlových stavbách na znalosti o krychlových stavbách. Pojem krychlová stavba se neobejde bez stavitelského určení směrů svislý a vodorovný, který sice do geometrie nepatří, ale je hluboce spojen s žákovskou zkušeností při manipulaci s krychlemi.

Krychlová stavba je *předpojem pojmu těleso*. Pokud vláček (Úloha KS_01) proměníme v sedmipodlažní věž, jsou to dvě různé stavby, jedna je jednopodlažní, druhá sedmipodlažní, ale jedná se o dvě shodná tělesa – pravidelný čtyřboký hranol. Jsou to dva různé pohledy, a sice jeden je „stavitelský“, kdy záleží na tom, co je nahoře a dole, a druhý geometrický. U krychlových staveb tedy uvažujeme o polohových vlastnostech, u těles ne. Polohové vlastnosti nejsou geometrické. Ze stavby se stává těleso v okamžiku, kdy přestaneme uvažovat o polohových vlastnostech. Z tělesa se nemusí stát stavbya, jestliže by se těleso sestrojené z volných krychlí rozsypalo.

Úloha KS_04 autorská úloha diagnostická úloha

Cíl: Žák využije předchozí zkušenosti k nalezení úplného souboru krychlových staveb daných několika podmínkami.

Zadání: Vezmi si všechny krychle, které máš k dispozici. Vytvoř stavbu za použití právě pěti krychlí, ale v prvním podlaží budou nejvýše 3 krychle. Zaznamenej každou stavbu plánem na čtverečkovaný papír. Najdi co nejvíce takových staveb.

Tato úloha i její uchopení v experimentu budu podrobně komentovat v další části (kapitola 4.1), protože jsem ji použila v situaci týkající se krychlových staveb, která je předmětem případové studie.

Rozvoj kombinatorického myšlení je možné pozorovat u úloh, kde je nutno hledat více, popřípadě všechna řešení. Výše uvedené úlohy (ale nejen tyto) vedou k diskuzi při vyhodnocování žákovských řešení, čímž dochází k upřesňování a dalšímu upevňování geometrické terminologie a zároveň k rozvoji prostorové představivosti.

Didaktické nástrahy prostředí Krychlové stavby

Pokud dojde k představení nového jazyka bez vyvolání jeho potřeby u žáka a jeho aktivní součinnosti, hrozí nebezpečí formálního uchopení tohoto jazyka. Jestliže učitel ve snaze urychlit poznání představí sám např. plán krychlové stavby, může být plán žáky přijat bez porozumění a učiteli pak nezbyde, než nový jazyk dlouze nacvičovat. Z různých hospitací u učitelů mohu usuzovat, že jeho užívání pak nevyvolává potřebu formulovat v tomto jazyce vlastní úlohy vedoucí k hlubšímu porozumění celé problematiky krychlových staveb a těles.

Z rozhovorů s učiteli se také dozvídáme, že při snaze vyhnout se organizačním komplikacím mnohdy opouštějí příliš brzy vlastní manipulativní činnost s krychlemi a vyžadují, aby žáci řešili úlohy jen na základě představ. Důsledkem takového postupu může být stagnace, někdy dokonce blokování rozvoje prostorové představivosti. Projevem takového nevhodného působení je situace, kdy si žáci „pletou“ plán u červené a zelené stavby (obr. 4) neboli zaměňují pohled zepředu a pohled shora. To bývá důsledkem toho, když plán, který je vytvořen ve vodorovné poloze, se zvedne do svislé podoby na tabuli, ale stavby zůstane stát na podložce.

Inverzní úloha (postavit stavbu podle plánu) neskrývá obvykle žádné didaktické nástrahy.

3.4.2 Origami

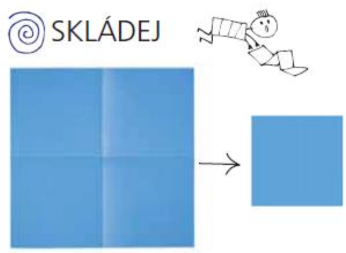
Japonské slovo ORIGAMI je možné přeložit jako umění papírových skládanek. Tuto techniku nenáročnou na přípravu pomůcek využívají učitelé v mateřských školách k rozvoji jemné motoriky dětí předškolního věku. Autoři učebnic (Hejný a kol., 2007) si vypůjčili toto slovo pro pojmenování prostředí, které je založeno na práci s papírem, na jeho překládání, stříhání apod. Prostředí je zavedeno v 1. ročníku. Při práci s papírem sledujeme cíl poznávat rovinné útvary, jejich průvodní jevy a vazby mezi nimi. Kromě toho zde jde také o objevování zákonitostí (např. úhlopříčka čtverce je delší než jeho strana) a rozvoj schopnosti uchopovat geometrické situace do slov, což je obtížnější než v aritmetice, a o rozvoj schopnosti argumentovat. Do schématu pojmu čtverec (nebo obecněji rovinný útvar) přináší práce v prostředí Origami vnímání rovinného útvaru jako části roviny (plocha útvaru), nikoliv jen jeho hranice, jak je tomu například v prostředí Dřívka (viz kapitola 3.3.3).

Úlohy z prostředí Origami dělím pro potřeby této práce do čtyř skupin. Do první skupiny úloh zařazuji takové, kdy se pomocí manipulace s papírovými tvary (čtverec, obdélník, trojúhelník) žák seznamuje s jejich průvodními jevy. U čtverce a obdélníku získává zkušenosti s jeho stranami a vrcholy, vytvoří jejich úhlopříčku i střední příčku, když přehýbá čtvercový papír na dvě stejné části podle některé jeho osy souměrnosti, poznává také střed strany i jev kolmosti a rovnoběžnosti. Ve všech případech je však zachován obsah původního tvaru, který se překládáním nezmění. Nedojde k oddělení žádné části původního obrazce, jen se změní (zvědomí) jeho vnitřní struktura (úhlopříčky, střední příčky u čtverce, výšky, těžnice a střední příčky u trojúhelníka apod.) Tato aktivita je také využívána k propedeutice zlomků, kdy žáci získávají první zkušenosti s pojmy polovina, čtvrtina a třetina.

Úloha O_01 převzatá úloha: M1/1/17/hra výuková, diagnostická úloha

Cíl: Žák překládáním čtverce podle některé jeho osy souměrnosti vytvoří čtyři shodné rovinné útvary (čtverce/trojúhelníky).

Zadání:



Obrázek 7: Překládání papíru na čtvrtiny (Hejný a kol., 2007, učebnice pro 1. ročník/1.díl, s. 17)

Při manipulaci nejprve žáci přehýbají čtverec podél některé z jeho os souměrnosti na dvě stejné části – poloviny. Učitel používá vhodnou geometrickou terminologii (vrchol, strana čtverce, osa souměrnosti, polovina, úhlopříčka), žáci sami pochopí význam některých slov a postupně je začne uplatňovat v praxi, nejlépe při žákovské komunikaci při obhajování vlastních názorů a nápadů. Pokračováním je další přehýbání tak, aby vznikly čtyři stejné části původního čtverce – čtvrtiny. I tady dojde nejméně ke dvěma možnostem – úhlopříčně či podélně přehnutý původní čtverec vytvoří čtvrtiny buď jako trojúhelníky nebo jako čtverce. I zde učitel komentuje práci žáků při užívání vhodné terminologie (čtvrtiny, střed souměrnosti, průsečík úhlopříček), ale nové pojmy nijak nevysvětluje.

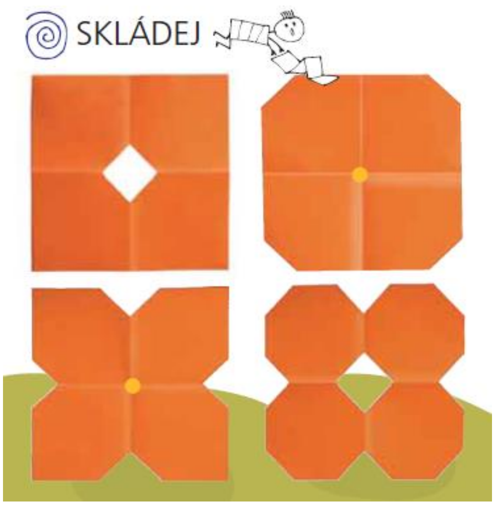
Diagnostická funkce této úlohy spočívá ve sledování zručnosti jednotlivých dětí při překládání papíru. Při řešení této úlohy došlo v mé třídě „nešťastnou náhodou“ k objevu dalšího rovinného útvaru – pravoúhlého lichoběžníku. Tento objev způsobil velkou vlnu kreativity i u ostatních žáků, nejen u autora objevu (kapitola 4.3).

Druhou skupinu úloh v prostředí Origami tvoří úlohy, kdy se z původního útvaru odstřihují různé části. Například ze čtverců tvoří žáci různé dečky přeložením na čtvrtiny a odstřihováním různých růžků. Každým i nezdařeným pokusem získávají vhled do pojmu čtverce jako osově souměrného rovinného útvaru se čtyřmi osami souměrnosti, které jsou na sebe po dvojicích kolmé.

Úloha O_02 převzatá úloha: M1/1/34/hra výuková, diagnostická úloha

Cíl: Žák vyznačí všechny čtyři osy souměrnosti čtverce.

Zadání:



Obrázek 8: Vytvořené dečky ze čtverce (Hejný a kol., 2007, Učebnice pro 1. ročník, 1. díl, s. 34)

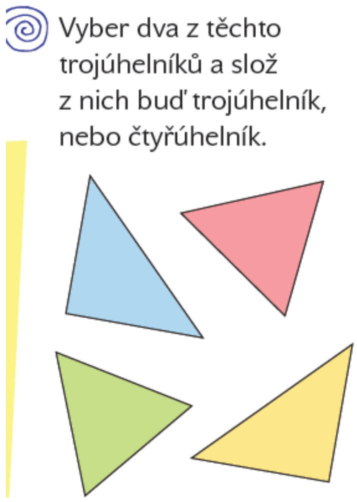
Před vlastním stříháním jednotlivých růžků vycházíme z překládání čtverce na čtvrtiny ve tvaru čtverce nebo trojúhelníku. Odstřižením různých růžků vznikají různé dečky – čtverce vyzdobené různými otvory a zaoblenými vrcholy. Výstava deček může mít až 12 různých exponátů. Při práci diskutujeme o různých možnostech odstřihávání a o tom, co způsobí změnu velikosti a tvaru odstřižené části. Všechny úlohy o dečkách sledují dva cíle, manipulativní a kognitivní. Manipulativním cílem je rozvoj jemné motoriky ruky, užívání nůžek, přesnost až preciznost práce. Kognitivním cílem je vybudovat v představě žáka porozumění pro čtyři osové souměrnosti čtverce.

Jako třetí skupinu úloh z prostředí Origami označuji ve své práci ty úlohy, kdy dochází ke zvětšení obsahu výsledného rovinného útvaru, tedy kdy ze základních tvarů (trojúhelníků, čtverců) žáci tvoří nové tvary vzájemným spojováním. Žáci tvoří známé, ale i nové, dosud nepoznané rovinné obrazce. V těchto úlohách je vždy nutné ze zadaných trojúhelníků vytvořit nový rovinný útvar, jehož obsah je dán součtem původních. Takto se žák při vhodně zadaných trojúhelnících seznámí se všemi základními čtyřúhelníky - čtverec, obdélník, kosočtverec, kosodélník, deltoid, lichoběžník i obecný čtyřúhelník.

Úloha O_03 převzatá úloha: M2/2/27/hra výuková, diagnostická úloha

Cíl: Žák vytvoří čtyřúhelník spojením dvou trojúhelníků, určí jeho vlastnosti

Zadání:



Obrázek 9: Zadání úlohy O_03 (Hejný a kol., 2008, Učebnice pro 2. ročník, 2. díl, s. 27)

Z modrého a žlutého trojúhelníku můžeme sestrojit rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník, čtverec nebo kosodélník. Z červeného a zeleného trojúhelníku složíme jen kosočtverec. Z červeného a modrého trojúhelníku sestrojíme obecný (různostranný) čtyřúhelník.

Pokud bude naším cílem sestrojit všechny základní typy čtyřúhelníků, je potřeba přidat i další typy a rozměry trojúhelníků. Čtverec sestavíme složením dvou shodných rovnoramenných pravoúhlých trojúhelníků spojením jejich nejdelší strany. Obdélník vzniká ze dvou shodných různostranných pravoúhlých trojúhelníků spojením jejich nejdelší strany. Kosočtverec sestavíme spojením dvou shodných rovnoramenných trojúhelníků (ostroúhlých nebo tupoúhlých) spojením jejich základen. Kosodélník vznikne ze dvou shodných pravoúhlých trojúhelníků (rovnoramenných nebo různostranných) spojením jejich shodných odvěsen. Deltoid je možné sestrojit složením dvou shodných různostranných trojúhelníků nebo dvou různých rovnoramenných trojúhelníků se shodnou základnou. Pro sestrojení lichoběžníku je nutno, aby oba trojúhelníky měly shodnou jednu stranu a jeden úhel při této shodné straně, ale není obecně možné sestrojit z libovolných dvou trojúhelníků lichoběžník. Častěji vznikne obecný čtyřúhelník.

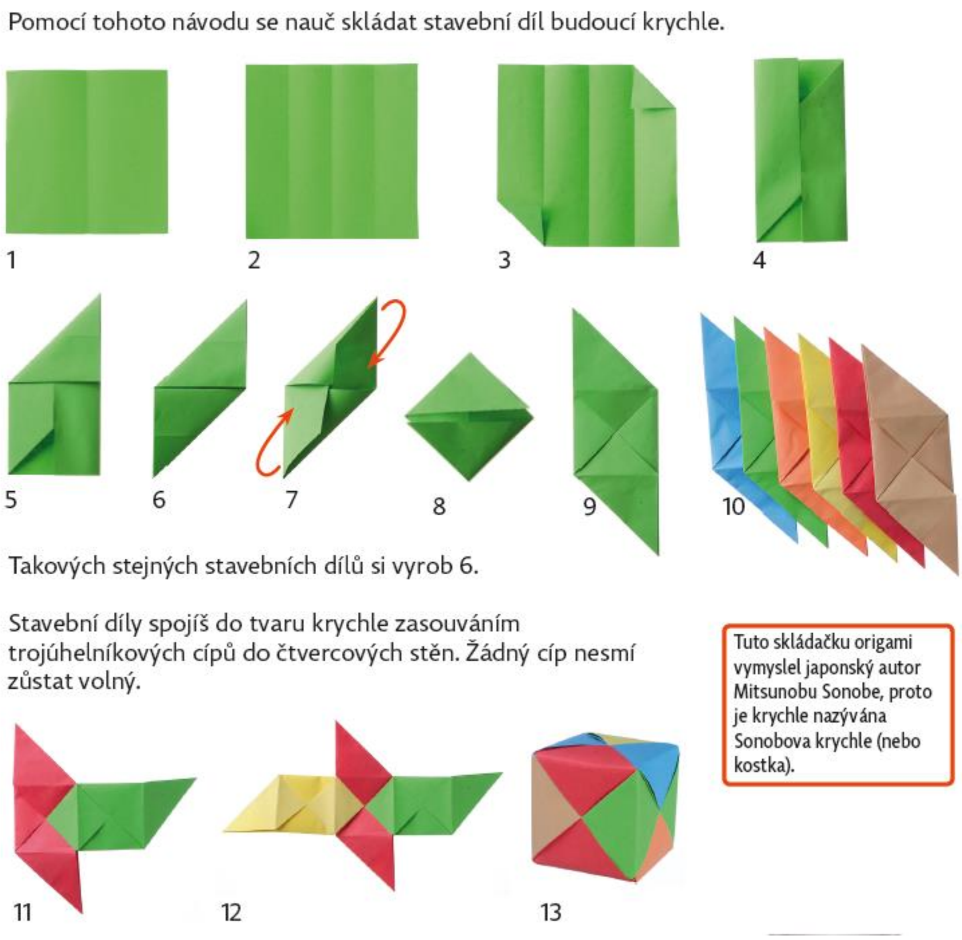
Do poslední skupiny jsem pro úplnost zařadila úlohy, kdy překládáním papíru vytvoříme prostorový objekt, i když se podrobněji touto problematikou nezabývám. V učebnici pro 4. ročník (Hejný a kol., 2010) získají žáci pracovní postup pro vytvoření Sonobovy[6] krychle, kromě toho vytvářejí v dalších úlohách papírové sítě krychle, kvádru i dalších těles.

[6] Mitsunobu Sonobe je japonský autor, který navrhl postup pro vytvoření papírové krychle jako origami

Úloha O_04 převzatá úloha: M4/70/6,7 výuková, diagnostická úloha

Cíl: Žák vytvoří trojrozměrný objekt (krychli) překládáním papíru

Zadání:



Obrázek 10: Ilustrace úlohy O_04 (Hejný a kol., 2010, Učebnice pro 4. ročník, s. 70)

Jedná se o náročnou úlohu z prostředí Origami. Cíle této úlohy jsou opět dva – manipulativní a kognitivní. Nejprve si klademe za cíl vytvoření krychle z šesti papírových čtverců. Teprve po zvládnutí manipulativní stránky (nebo souběžně s tím) se zabýváme i pojmenováním jednotlivých tvarů – šestiúhelník, lichoběžník, rovnoběžník. V poslední fázi klademe různé doplňující otázky týkající se např. nejmenšího počtu barev tak, aby dvě sousední stěny krychle nebyly vytvořeny z papíru stejné barvy.

Didaktický potenciál prostředí Origami:

Žák objevuje průvodní jevy základních typů trojúhelníků, čtyřúhelníků i jiných mnohoúhelníků, objevuje vazby mezi průvodními jevy i mezi jednotlivými obrazci (např., že čtverec je možné vytvořit ze dvou shodných pravoúhlých rovnoramenných trojúhelníků, že jeho úhlopříčky jsou na sebe kolmé, že jej lze rozdělit na 4 shodné čtverce, popřípadě na 4 shodné pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky, že spojnice středů protějších stran je osou souměrnosti,…), rozvíjí schopnost předvídat, co nastane po jisté transformaci, rozvíjí schopnost mentálních operací, prostorovou představivost i jemnou motoriku, schopnost argumentace (např. proč je trojúhelník vzniklý přehnutím čtverce na polovinu stejně velký jako obdélník vzniklý také přehnutím čtverce na polovinu), seznamuje se s geometrickou terminologií.

Žák získává zkušenosti s obsahem rovinných obrazců. (Sdělení, že daný čtverec je tvořen čtyřmi menšími shodnými čtverci, se týká obsahu). Posoudí, zda dva čtverce se stejnou délkou strany mají stejný nebo různý obsah, přeměnou jednoho obrazce na druhý získávají zkušenosti s obrazci různých tvarů, ale stejného obsahu a někdy i různého obvodu.

Didaktickou nástrahou prostředí Origami je, že někdy dochází k nápodobě pracovního postupu, děti učitel nevede k vlastní tvorbě, ale k nápodobě rychlejšího spolužáka. Učitele toto prostředí svádí ke sdělování přesného pracovního postupu tak, aby všechny děti dospěly ke stejnému výsledku a vyhnuly se „zbytečným“ chybám. Tím dochází k potlačení přirozené tvořivosti žáků.

3.4.3 Dřívka

Dřívka je další manipulativní prostředí, které má základ v různých sirkových hlavolamech uváděných v mnoha populárních publikacích (Demeterová, 2010). Úlohy z tohoto prostředí zdůrazňují hranice objektu, případně jeho vnitřní „příčky“, jako například střední příčky u trojúhelníka. Dřívka jsou stejně dlouhá, při řešení úloh se postupně vyjasňují pravidla pro vytváření rovinných dřívkových útvarů. Uvedu čtyři typy úloh s konkrétními ukázkami.

První skupina úloh slouží k upřesňování používaných pravidel. Dřívka se dotýkají pouze svými konci, nekříží se, obrazec je vždy uzavřen. Poslední pravidlo počáteční úlohy nesplňují, neboť se jedná zatím jen o „hraní“, jako vytváření číslic, písmen, obrázků a asociací.

Úloha D_01 převzatá úloha: M1/1/28, 38/hra výuková úloha

Cíl: Žák zpřesňuje pravidla pro práci s dřívky, konstruuje objekty ze svého okolí

Zadání:

Obrázek 11: Hledání a upevňování pravidel pro kladení dřívek (Hejný a kol., 2007, učebnice pro 1. ročník/1.díl, s. 28 a 38)

Druhou skupinu úloh reprezentují takové, kdy z dřívek můžeme vytvářet různé geometrické *tvary*, např. čtverec, obdélník, trojúhelník (rovnostranný, rovnoramenný, pravoúhlý), kosočtverec, kosodélník, lichoběžník rovnoramenný, deltoid, pravidelný šestiúhelník a řadu nekonvexních obrazců. Při řešení úloh o geometrických obrazcích se formuluje další pravidlo, a sice uzavřenost dřívkového obrazce, tedy že každé dřívko se dotýká každým koncem jiného dřívka. Důležitým parametrem v úlohách tohoto typu je obvod mnohoúhelníku. Buď žáci zjišťují, kolik dřívek je potřeba na vytvoření daného obrazce, nebo sestrojují obrazec z předem daného počtu použitých dřívek. Současně s tvorbou jednotlivých útvarů dochází poznávání shodnosti délek stran nebo trojúhelníkové nerovnosti. Děti (a mnohdy i studenti) klidně sestrojí trojúhelník ze 4 dřívek o stranách, 1, 1, 2 dřívka a není jim to divné. Nedodrží totiž pravidlo o stejné vzdálenosti (těsném dotyku) mezi dvěma sousedními dřívky. Pokud se nenajde ve skupině nikdo, kdo by tento omyl uměl vyvrátit, je potřeba přistoupit k jinému modelu, například vyzvat ke konstrukci trojúhelníku o stranách v poměru 1:1:2 kružítkem a pravítkem.

Úloha D_02 převzatá úloha: M4/48/1,2 výuková, diagnostická úloha

Cíl: Žák vytvoří trojúhelník daného obvodu, určí délky stran vytvořeného trojúhelníku, hledá více/všechna řešení.

Zadání: Vymodeluj co nejvíce různých trojúhelníků, které mají obvod 3 dřívka, 4 dřívka, 5 dřívek, 6 dřívek, 7 dřívek, 8 dřívek, 9 dřívek, 10 dřívek, 11 dřívek, 12 dřívek.

Žák objevuje různé typy trojúhelníků. Ze tří dřívek sestaví pouze jeden rovnostranný trojúhelník, ale trojúhelník ze 4 dřívek neexistuje (trojúhelníková nerovnost – viz výše). Z pěti, šesti a osmi dřívek žáci naleznou vždy po jednom trojúhelníku (rovnoramenný a rovnostranný), v ostatních případech jsou vždy alespoň dvě řešení, převažuje počet rovnoramenných trojúhelníků.

Třetí skupina úloh je charakterizována slovy chirurgie/změna/přeměna. Z dřívek vytváříme obrazce, které je možné různě přeměňovat. Každá přeměna je dána přidáním, ubráním nebo přesunutím určitého předem daného počtu dřívek.

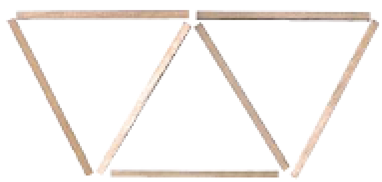
Úloha D_03 převzatá úloha: M3/45/4 výuková úloha

Cíl: Žák rozvíjí své představy o trojúhelníku, rovnoběžníku a lichoběžníku.

Zadání:

Vytvoř z dřívek obrázek.

a) Uber jedno dřívko, abys měl 2 trojúhelníky a žádný čtyřúhelník.
b) Přesuň dvě dřívka, aby vznikly 2 trojúhelníky a 1 čtyřúhelník.
c) Přesuň dvě, abys dostal 2 čtyřúhelníky a 1 trojúhelník.
d) Přidej dvě, aby vzniklo 6 čtyřúhelníků a 5 trojúhelníků.
e) Jedno přidej a jedno přesuň, abys získal 3 trojúhelníky a 3 čtyřúhelníky.
f) Jedno přidej a jedno přesuň, abys měl 2 čtyřúhelníky a žádný trojúhelník.



Obrázek 12: Zadání úlohy D_02 (Hejný a kol., 2009, učebnice pro 3. ročník, s. 45)

Při řešení této úlohy je nejprve nutno určit, kolik trojúhelníků a čtyřúhelníků je vytvořeno (3 trojúhelníky a 3 čtyřúhelníky). Učitel může používat i pojmy rovnostranný trojúhelník, rovnoběžník, rovnoramenný lichoběžník, kosodélník či kosočtverec, ale žádný z těchto pojmů blíže nevysvětluje. Pokud se některý žák zeptá na význam těchto slov, dostane se mu odpovědi buď od ostatních žáků, případně od učitele. Žáci volí různé strategie řešení, nejčastěji jsem viděla strategii postupného plnění pokynů (uber jedno dřívko, přesuň dvě dřívka, přidej dvě dřívka, jedno přidej a jedno přesuň) a ověřování, zda je splněn požadovaný výsledek. Úloha je zajímavá i tím, že v posledním případě nemá řešení, všechny ostatní varianty mají právě jedno řešení. U některých variant (b, c, e) je toto řešení ale získáno jiným způsobem, přesunem jiných dřívek. Výsledný obrazec se pak liší pouze otočením.

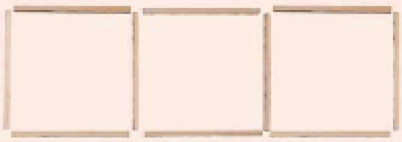
Třetí skupinu úloh tvoří takové úlohy, kdy je propojeno více oblastí matematiky, konkrétně se jedná o posloupnosti s propedeutikou algebry a hledání závislostí.

Úloha D_04 převzatá úloha: M3/23/1,2 výuková, diagnostická úloha

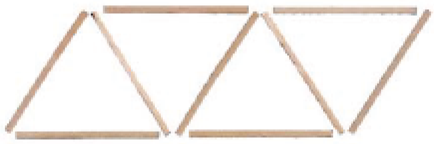
Cíl: Žák hledá vztah mezi dvěma neznámými veličinami (počet oken a počet dřívek)

Zadání:

K vytvoření tří čtvercových oken potřebuješ deset dřívek. Řekni, kolik dřívek potřebuješ k vytvoření:
a) 4;
b) 10;
c) 33 oken?



K vytvoření čtyř trojúhelníkových oken potřebuješ devět dřívek. Kolik dřívek potřebuješ k vytvoření:
a) pěti;
b) deseti;
c) čtyřiceti oken?



Obrázek 13: Zadání úlohy D_04 (Hejný a kol., 2009, Učebnice pro 3. ročník, s. 23)

Při řešení úlohy pracujeme systematicky, výsledky zapisujeme rovnou do tabulky, která vyjadřuje závislost mezi počtem vytvořených oken a počtem použitých dřívek.

U čtvercových oken narůstá číslo v druhém řádku vždy o 3 dřívka. Počet použitých dřívek je možné vyjádřit několika způsoby, např. „Na první okno jsou potřeba 4 dřívka a na každé další jen tři. Když mám udělat 8 oken, tak na první je zase 4 a k tomu 3x sedm, tou trojkou násobím o jedno míň, než kolik chci oken.“ (Příloha 14) Dalším způsobem je následující vyjádření: počet oken x 3 + 1 (první) dřívko.

U trojúhelníkových oken narůstá číslo v druhém řádku vždy o 2 dřívka. Počet použitých dřívek je i tady možné vyjádřit několika způsoby, např. počet oken se zdvojnásobí a zvětší o jedna.

Tato úloha sehrála roli v další případové studii (kapitola 4.3), kde se děti začaly zajímat i o další tvary, především o pravidelné mnohoúhelníky.

<u>Didaktický potenciál prostředí Dřívka:</u>

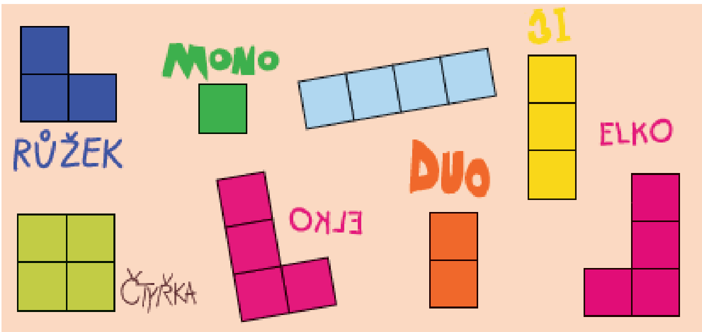
Žák poznává další modely rovinných obrazců, poznává jejich průvodní jevy a vazby mezi nimi (např. že střední příčky trojúhelníka dělí trojúhelník na 4 shodné trojúhelníky podobné s původním v poměru 1 : 2, ale také, že úhlopříčku čtverce nelze vyznačit pomocí dřívek apod.)

Žák získává zkušenosti s obvodem i obsahem rovinných obrazců. Seznamuje se také se situacemi, kdy různé rovinné útvary stejného typu mohou mít stejný obsah ale různý obvod a naopak.

Didaktickou nástrahou prostředí Dřívková geometrie je fakt, že při práci se dřívky je vizuálně zdůrazněna hranice rovinného útvaru a potlačeno je vnímání daného útvaru jako části roviny. Tuto skutečnost je tedy třeba vyvažovat jednak řešením úloh z prostředí Origami a také diskuzí nad jednotlivými úlohami – čtverec je rám kolem pískoviště (vytvořený ze dřívek), ale i písek uvnitř.

3.4.4 Parkety

Další manipulativní prostředí má základ v pokrývání „podlahy“ různými „dlaždicemi“. Podlahou rozumíme čtvercové polymino, tedy mnohoúhelník vytvořený z konečného počtu čtverců. Může to být obdélník, čtverec a různé další nekonvexní mnohoúhelníky - čtvercová polymina, Jako parkety jsou používána různá polymina – monomino, domino, trimina, tetramina, …, která jsou pojmenována metaforicky jako mono, dvojka, růžek, čtyřka, tedy jazykem, kterému děti rozumějí a který asociuje daný tvar (obr. 4). Úkolem je pokrýt podlahu tak, aby se žádné dvě parkety nepřekrývaly a aby nezůstala žádná část podlahy nepokrytá.



Obrázek 14: Typy použitých parket (Hejný a kol., 2009, Učebnice pro 3. ročník, s. 12)

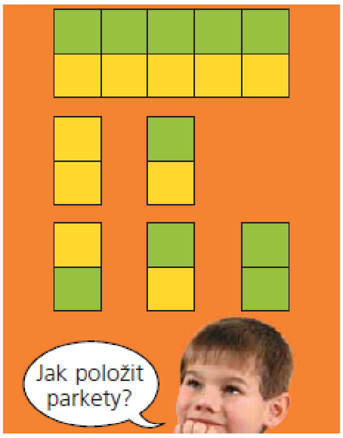
Při řešení úloh manipulací s parketami nebo vybarvováním žák poznává shodná i neshodná zobrazení. Dvě řešení, tedy dvě parketami pokryté podlahy považujeme za shodná, když existuje shodné zobrazení, které jednu podlahu zobrazí do druhé. Je ale na žácích, zda se dohodnou, zda nepřímo shodné podlahy jsou nebo nejsou shodné. Důležitou roli při řešení jednotlivých úloh hraje počet řešení. Existují úlohy, které mají právě jedno řešení, více nebo dokonce žádné řešení.

V prvním ročníku jsou v učebnici (Hejný a kol., 2007) uvedeny úlohy (P_01), kde podlaha má tvar obdélníku o rozměru 2 x n, kde $n \in \{3, 4, 5, 6\}$. Parkety jsou rozlišeny také barevně. Použitými tvary parket jsou monomino (MONO), domino (DUO) i obě trimina (RŮŽEK, ÍČKO).

Úloha P_01 převzatá úloha: M1/2/27/hra výuková, diagnostická úloha

Cíl: Žák pokryje obdélníkovou podlahu několika dominy, která se navzájem nepřekrývají.

Zadání:



Obrázek 15: Zadání úlohy P_01 (Hejný a kol., 2007, učebnice pro 1. ročník, 2. díl, s. 27)

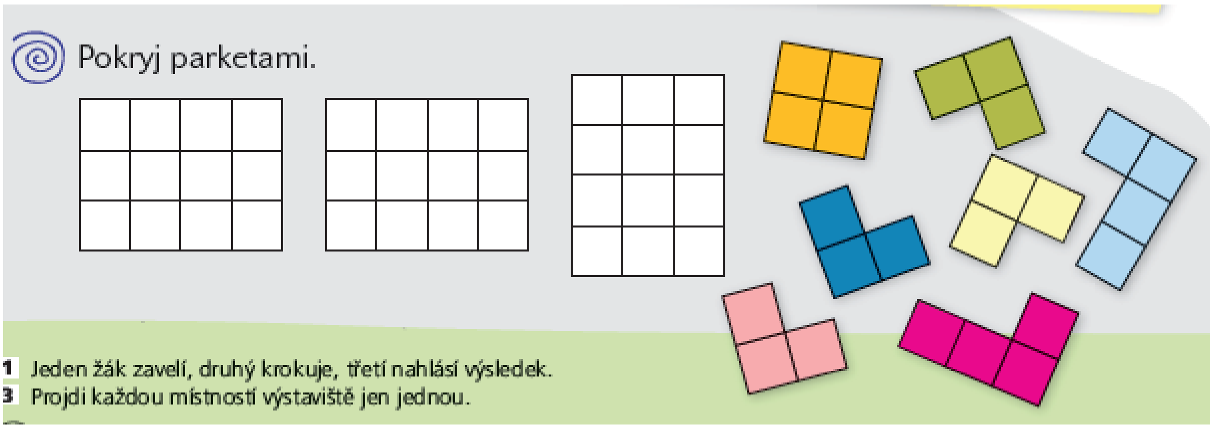
Tato úloha má v podstatě za cíl seznámit se s prostředím Parkety. Jedná se o úlohu, která má sice čtyři řešení v závislosti na poloze žlutého a zeleného domina, přičemž vždy dvě dvojice jsou nepřímo shodné, ale tato řešení nejsou vyžadována. Při společné kontrole a vyhodnocení jsou na tabuli vždy uvedena všechna nalezená řešení, čímž se žáci seznamují s možností, že úloha nemusí mít jediné správné řešení. Je tedy vhodná diskuze o shodnosti či různosti nalezených řešení, i když v prvním ročníku je pro většinu dětí ještě pozice objektu důležitější než nepřímá shodnost. Přesto je možné, že někdo bude stranově převrácené řešení pokrytí podlahy považovat za shodné.

Ve druhém ročníku se podlaha rozšiřuje na pravoúhelník $m \times n$ (viz úloha P_02) a dochází ke zvýšení počtu i typů použitých parket na všechna tetramina. Není vyžadováno nalezení všech řešení, ale vždy jsou děti vyzvány k hledání více řešení. I zde je vhodná diskuze o jednotlivých řešeních, přičemž je možné, že budou nalezena všechna řešení. Důkaz úplnosti řešení se provádí jen tehdy, pokud s tím některý z žáků vystoupí při společném vyhodnocení.

Úloha P_02 převzatá úloha: M2/1/14/hra výuková, diagnostická úloha

Cíl: Žák pokryje obdélníkovou podlahu parketami daného typu.

Zadání:



Obrázek 16: Zadání úlohy P_02 (Hejný a kol., 2008, Učebnice pro 2. ročník/ 1. díl, s. 14)

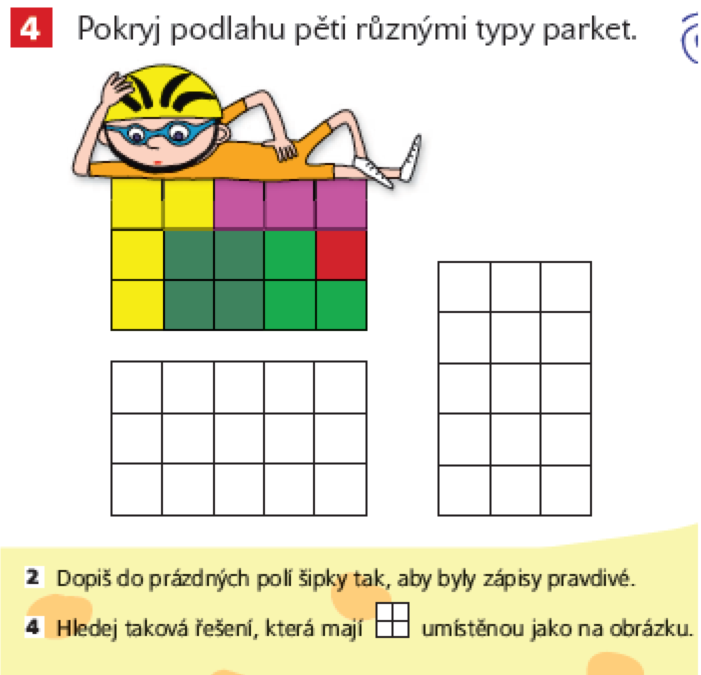
Úloha má čtyři různá řešení bez ohledu na barevnost parket. Dvě řešení je možné objevit při použití parket ČTYŘKA a ELKO, další dvě při použití všech parket typu RŮŽEK. Zvláštností je zde otočení jedné podlahy o 90°, čímž učitel provádí diagnostiku, jak jednotliví žáci „vidí“ otočení obrazce.

Od třetího ročníku můžeme zadávat úlohy s dalšími podmínkami, které omezují mnohdy velký počet řešení. Podmínkou může být například nutnost použít každý z uvedených typů parket alespoň jednou, poloha některého typu parkety na podlaze (např. čtyřka nesmí být u kraje), či vzájemná poloha vybraných typů parket (tak, aby dva růžky neměly společnou žádnou svoji část, aby se nedotýkaly).

Úloha P_03 převzatá úloha: M2/1/38/4 výuková, diagnostická úloha

Cíl: Žák rozumí zadané podmínce, kombinuje další možnosti vzájemnou výměnou parket.

Zadání:



Obrázek 17: Zadání úlohy P_03 (Hejný a kol., 2008, Učebnice pro 2. očník, 1. díl, s. 38)

Tím, že je zadána doplňující podmínka ohledně umístění jedné parkety (ČTYŘKY) dojde k podstatnému snížení počtu řešení na 9 z celkového počtu 27 různých řešení. Nejčastější chybou, která se vyskytuje u úloh s podmínkou, je její nedodržení. Buď použijí více, nebo naopak méně parket než pět, případně některý typ použijí dvakrát. Zajímavostí je, že nelze použít parketu DUO. Žák, který na tuto skutečnost upozorní, má zřejmě velmi vysokou pozorovací schopnost. Pokud navíc začne zkoumat, proč tomu tak je, má dobré předpoklady pro rozvoj abstraktního myšlení.

Specifickým typem úloh jsou takové úlohy, kde je vyžadováno nalézt všechna řešení. Při argumentaci ohledně úplnosti nalezených řešení se předpokládá jistá schopnost systematického prohledávání a odpovídající argumentace.

Úloha P_04 převzatá úloha: M3/95/7 výuková, diagnostická úloha

Cíl: Žák rozumí zadané podmínce, najde všechna řešení.

Zadání: Podlahu ve tvaru obdélníku 4 x 6 pokryj jenom parketami typu a) DUO, b) RŮŽEK, c) ÍČKO, d) ČTYŘKA e) ELKO. Hledej vždy všechna řešení

Úloha je řešitelná metodou pokus x omyl, kdy je možné najít vždy nějaké řešení. Při nutnosti najít všechna řešení je potřeba stanovit postup, jak zjistit, že byly vyčerpány všechny možnosti. To vede následně k substituční metodě, kdy se zadaný velký obdélník rozdělí na několik menších obdélníků (2 x 3, 2 x 4 nebo 3 x 4). Pak nalezneme všechna řešení pro tento obdélník, a vzájemnou kombinací (substitucí) zjistíme všechna řešení.

Úloha P_05 převzatá úloha: M3/58/2 (modifikováno) výuková úloha

Cíl: Žák rozumí zadané podmínce, kombinuje parkety jednoho typu.

Zadání: Pokryj čtvercovou podlahu pouze parketami ÍČKO tak, aby jedno políčko zůstalo volné. Urči polohu volného políčka. Uvažuj o čtvercích o velikosti 3 x 3, 4 x 4, 5x 5, … n x n.

Pro n dělitelné třemi úloha nemá řešení, není možné zachovat jedno volné políčko. U ostatních variant to možné je. Není však jednoduché nalézt pozici tohoto políčka. U čtverce 4 x 4 leží toto políčka vždy v jednom z rohů, u čtverců o rozměrech 5 x 5 a 7 x 7 je vždy uprostřed. U dalších rozměrů se využívá substituce, kdy se plocha čtverce rozdělí na kombinaci menších čtverců a obdélníků. (Pro čtverec 8 x 8 se plocha nahradí jedním čtvercem 5 x 5, jedním čtvercem 3 x 3 a dvěma obdélníky 5 x 3.)

Didaktický potenciál prostředí Parkety:

Vést žáky k pochopení pojmu plocha rovinného obrazce. Pravidlo o nepřekrývajících se parketách vede později ke zjištění, jak určit obsah složitějšího rovinného obrazce, který je možné rozdělit na navzájem se nepřekrývající čtverce a obdélníky a výsledný obsah určit jako součet dílčích obsahů.

Propojení aritmetiky a geometrie. Obdélník s danými rozměry a jeho obsah je grafickým vyjádřením součinu dvou čísel (délky a šířky obdélníku). Na základě manipulativní zkušenosti žáci vnímají vazbu mezi součinem a plochou.

Rozvíjet kombinatorické myšlení žáků. Metodou pokus x omyl žáci při řešení jednotlivých úloh kombinují různé možnosti pokrytí podlahy, provádějí substituci (parketu ČTYŘKA nebo ELKO mohou nahradit dvěma parketami DUO), řeší různé možnosti umístění jednotlivých parket a tím rozvíjí svoji geometrickou představivost.

Didaktické nástrahy prostředí Parkety:

U tohoto prostředí jsem nezaznamenala žádné didaktické nástrahy.

3.4.5 Vazba zkoumaných didaktických prostředí na RVP

V této části své disertační práce se pokusím podrobně odpovědět na otázku, jak je výuka v duchu teorie budování schémat propojena s jedním z nejdůležitějších kurikulárních dokumentů, a to s platným Rámcovým vzdělávacím programem pro základní vzdělávání (zkratka RVP). Zaměřím se na všechny očekávané výstupy nejen pro 1. stupeň, ale i pro 2. stupeň základní školy. Seznam všech očekávaných výstupů pro geometrii uvádím v Příloze 15.

V poslední platné úpravě Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání (www.msmt.cz), které jsou platným kurikulárním dokumentem pro základní vzdělávání podle poslední úpravy ze dne 1. 9. 2013, jsou očekávané výstupy rozděleny na 1. a 2. stupeň, přičemž pro první stupeň jsou rozlišeny ještě výstupy pro 1. období (1. – 3. ročník) a druhé období (4. – 5. ročník). Stejnou strukturu nalezneme i u tematického celku Geometrie v prostoru a rovině. Kompletní seznam všech výstupů uvádím v Příloze č. 15.

V 1. období pro 1. stupeň jsou schváleny tři očekávané výstupy pro oblast geometrie v rovině a v prostoru. Jedná se o tyto očekávané výstupy:

> *M-3-3-01: rozezná, pojmenuje, vymodeluje a popíše základná rovinné útvary a jednoduchá tělesa; nachází jejich reprezentaci*
>
> *M-3-3-02 porovnává velikost útvarů, měří a odhaduje délku úsečky*
>
> *M-3-3-03 rozezná a modeluje jednoduché souměrné útvary v rovině.*

Výstup M-3-3-01 je splněn ve všech v práci studovaných prostředích. Žák poznává rovinné útvary při práci s papírem v prostředí Origami (viz. 3.4.2), modeluje je překládáním čtvercového nebo obdélníkového papíru, komunikuje o různých tvarech, vymodeluje je při práci s dřívky (viz. 3.4.3) a při manipulaci s parketami (viz. 3.4.4). Poznání v činnostech se posouvá do poznání ve slovech tím, že žáci i učitel doprovázejí činnosti slovy, popisují vzniklé objekty, argumentují. Tak žák postupně zpřesňuje geometrický jazyk jako nástroj komunikace, a postupně buduje geometrickou terminologii, která také odráží úroveň myšlení a porozumění. V prostředí Krychlových staveb (viz. 3.4.1) si žák vytváří předpojem tělesa a pracuje nejméně se třemi reprezentacemi krychlové stavy – fyzickým modelem, portrétem a plánem. V komunikaci o krychlových stavbách obvykle užívá jazyk metaforický (např. kvádr nazývá budovou, pravidelný čtyřboký hranol věží nebo vláčkem v souvislosti s polohou hranolu apod.), který je pro komunikaci bez větších nedorozumění dostačující.

Výstup M-3-3-02 je také bohatě naplněn při práci v jednotlivých prostředích. Konkrétně v prostředí Origami (viz. 3.4.2) porovnává přiložením délky stran, úhlopříček a středních příček (u čtverců, obdélníků či trojúhelníků), zjišťuje, že úhlopříčka čtverce je vždy delší než jeho strana. Také porovnává velikosti celých útvarů, například při dvojím složení čtvercového papíru na čtverec žák vyjadřuje jednak, jakou částí velkého čtverce je malý čtverec a také kolikrát je jeden čtverec větší/menší než druhý. Tímto se otevírá také myšlenka obsahu. V prostředí Dřívek (viz. 3.4.3) žák užívá jako jednotku délky 1 dřívko (1dř.) „strana obdélníku je ze tří dřívek“. V prostředí Parkety (viz. 3.4.4) žák vyjadřuje obsah obrazce nejdříve pomocí jednotky 1 kachlík/čtvereček, což je dle RVP očekáváno až ve 2. období, tedy ve 4. nebo 5. ročníku. V prostředí Krychlové stavby (viz. 3.4.1) vyjadřuje výšku krychlové stavby jako počet podlaží a určuje její objem jako počet všech použitých krychlí. Tedy pracuje s jednotkou objemu 1 krychle.

Výstup M-3-3-03 je také splněn ve všech uvedených prostředích. V každém z nich jsou zařazeny úlohy, kdy vzniknou jednoduché souměrné útvary. Žák poznává tyto geometrické objekty tak, že s nimi nejdříve manipuluje, řeší odpovídající úlohy, komunikuje o nich, hovorový nebo metaforický jazyk postupně precizuje a nakonec, mnohdy až na 2. stupni přijme formalizovaný jazyk, tedy přesnou geometrickou terminologii – středově souměrný obrazec a osově souměrný obrazec.

Každý z těchto tří výstupů je do výuky zařazován opakovaně v různých modifikacích a různých prostředích, takže s nimi žák přichází do styku po celé první období prvního stupně.

Ve 2. období pro 1. stupeň je očekáváno pět výstupů pro oblast geometrie v rovině a v prostoru. Uvádím zde pouze ty, které jsou plněny prostřednictvím řešení úloh ve výše uvedených prostředích (úplný přehled v Příloze 15).

> *M-5-3-02 sčítá a odčítá graficky úsečky; určí délku lomené čáry, obvod mnohoúhelníku sečtením délek jeho stran*
>
> *M-5-3-04 určí obsah obrazce pomocí čtvercové sítě a užívá základní jednotky obsahu*
>
> *M-5-3-05 rozpozná a znázorní ve čtvercové síti jednoduché osově souměrné útvary a určí osu souměrnosti útvaru překlápěním papíru*

Výstup M-5-3-02 je plněn při práci v prostředí Dřívek (viz. 3.4.3), kdy žák sestrojí obrazec a určí počet použitých dřívek (tedy obvod daného útvaru). Nebo má za úkol prodloužit stranu například čtverce dvakrát, třikrát, …. Také je zařazována úloha inverzní, kdy je zadán obvod daného útvaru a žák jej sestrojí (úloha D_02). V ostatních zde uvažovaných prostředích není obvod rovinného útvaru exponován, tudíž není tento očekávaný výstup plněn. Je ale dále plněn v prostředí čtverečkovaného papíru, které ale v této práci podrobně neuvádím.

Výstup M-5-3-04 je plněn především při práci v prostředí Origami (viz 3.4.2), kdy žák nejprve užívá jako jednotku obsahu jeden kachlík čtvereček, nebo i trojúhelník, který vytvořil přehýbáním papíru. Později při práci na centimetrové čtvercové mříži se jeden čtvercový kachlík přejmenuje na čtverečný centimetr.

Výstup M-5-3-05 je plněn ve všech prostředích. Při překládání čtverce podle jedné jeho osy žáci poznávají shodnost dvou trojúhelníků/obdélníků, při pokládání parket rozhodujeme o souměrnosti dvou vyparketovaných podlah. I při práci s dřívky modelujeme osově i středově souměrné útvary.

Každý z těchto výstupů je do výuky zařazován opakovaně již ve výuce 1. – 3. ročníku, takže se jimi žák zabývá po celé první období prvního stupně. Kromě očekávaných výstupů pro 1. stupeň žák navíc plní s předstihem i některé očekávané výstupy i pro 2. stupeň.

Pro 2. stupeň je schváleno třináct očekávaných výstupů pro oblast geometrie v rovině a v prostoru. Uvádím zde opět pouze ty, které jsou plněny či připravovány k plnění prostřednictvím řešení úloh ve výše uvedených prostředích (úplný přehled v Příloze 15) již na 1. stupni, tedy dříve je požadováno na základě schváleného RVP.

M-9-3-01 zdůvodňuje a využívá polohové a metrické vlastnosti základních rovinných útvarů při řešení úloh a jednoduchých praktických problémů; využívá potřebnou matematickou symboliku

M-9-3-02 charakterizuje a třídí základní rovinné útvary

M-9-3-04 odhaduje a vypočítá obsah a obvod základních rovinných útvarů

M-9-3-09 určuje a charakterizuje základní prostorové útvary (tělesa), analyzuje jejich vlastnosti

M-9-3-10 odhaduje a vypočítá objem a povrch těles

Výstupy M-9-3-01 a M-9-3-02 plní žák ve všech prostředích, zdůvodňuje a využívá polohové i metrické vlastnosti základních útvarů především při argumentaci, kterou podporuje svá vlastní zjištění a objevy. Zároveň charakterizuje a třídí rovinné útvary do jednotlivých skupin – trojúhelníky a čtyřúhelníky jako dvě základní skupiny, čtyřúhelníky dále třídí na pravoúhelníky, kosoúhelníky a lichoběžníky.

Výstup M-9-3-04 je připravován od počátku práce v jednotlivých prostředích. Tím se žákům daří rozlišovat význam slov obvod a obsah a zvládají jejich určování bez nutnosti použít odpovídající algebraický zápis vzorce. Protože jednotlivým výpočtům důkladně rozumí, zvládají odvození vzorců pro jednotlivé rovinné útvary i jejich používání, avšak nikoliv na úrovni paměti, ale na úrovni porozumění.

Výstupy M-9-3-09 a M-9-3-10 se týkají těles. V prostředí Krychlových staveb žák určuje a charakterizuje základní krychlová tělesa, přestože se soustředí většinou na jejich polohové vlastnosti, které však dokáže zobecnit. Také základní výpočty objemu a povrchu krychlových těles provádí bez nutnosti znát obecný vzorec pro jejich výpočet. Na druhém stupni je možné rozšířit tedy soubor těles o další mnohostěny i oblá tělesa.

V dalším oddíle se budu věnovat problematice obvodu a obsahu z hlediska RVP. Konkrétně budu zjišťovat, do jaké míry žáky práce ve výše uvedených geometrických prostředích připravila pro výuku těchto pojmů na 2. stupni. K tomu účelu jsem využila sadu diagnostických úloh, jejichž primárním cílem bylo odhalit potíže žáků 1. stupně v této oblasti.

3.5 Tematický celek Obvod a obsah

Učivo týkající se tematického celku Obvod a obsah rovinného útvaru je dle RVP zařazeno až do druhého období 1. stupně jako výstup M-5-3-01 a M-5-3-02 (Příloha 15). Na základě teorie budování schémat jsem však toto učivo ve své výuce zařazovala mnohem dříve tak, jak bylo zařazeno v učebnici pro odpovídající ročník. Připravovala jsem žáky tak, aby učivu především rozuměli, tedy zařazovala jsem úlohy propedeutické. V části 3.5.1 představím celkovou koncepci a průřez výukou tohoto tematického celku v učebnicích z dílny M. Hejného. V části 3.5.2 podrobněji popíšu úlohy, které vznikly v průběhu mé spolupráce na projektu GA ČR – Kritická místa matematiky na základní škole (GAČR P407/11/1740).

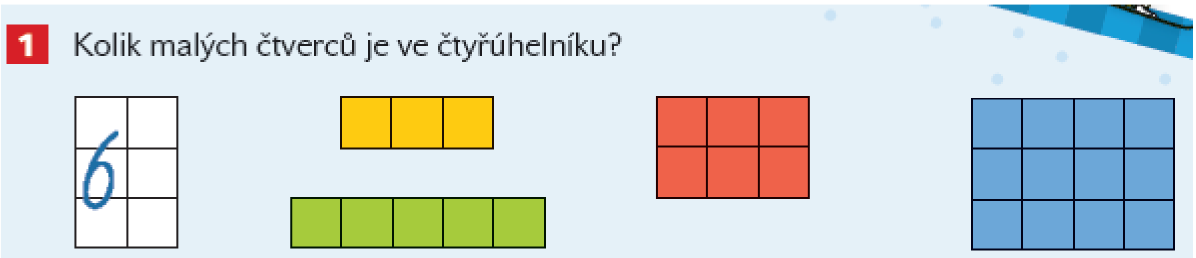
3.5.1 Typy úloh zařazovaných v průběhu výuky.

Propedeutické úlohy týkající se obsahu čtyřúhelníku jsou zařazovány v prostředí Parket (viz 3.4.4), kde ale není prvotním cílem určit obsah daného čtyřúhelníku. Jako propedeutické je možné označit takové úlohy, kde je sice úkolem určit obsah obrazce, ale otázka je položena tak, aby jí rozuměl každý žák bez použití slova obsah.

Úloha OBS_01 převzatá úloha: M2/2/28/1 výuková/diagnostická úloha

Cíl: Žák určí obsah čtyřúhelníku pomocí jednotky 1 malý čtverec.

Zadání:



Obrázek 18: Zadání úlohy OBS_01 (Hejný a kol., 2008, Učebnice pro 2. ročník, 2. díl, s. 28)

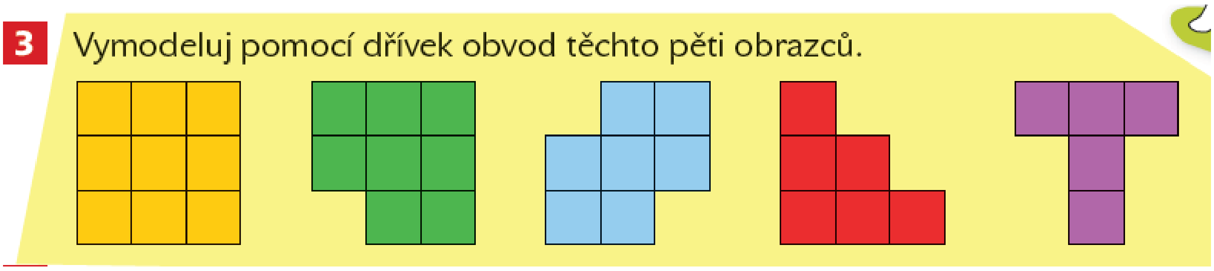
Jedná se o úlohu, kdy učitel především sleduje strategie řešení u jednotlivých žáků. U žlutého obdélníku většina žáků určí pouze pohledem, že se jedná o 3 malé čtverce, u zeleného obdélníku je potřeba jejich počet určit vyslovením číselné řady. U červeného a modrého obdélníku je již možná větší variabilita řešitelských strategií. Určitě budou někteří žáci počítat „po jedné“ ukazováním na jednotlivé obdélníky, ale vždy se najde alespoň jeden žák, který bude počítat po dvou, po třech nebo po čtyřech, tedy bude vlastně využívat řadu násobků. V takovém případě je žádoucí jej vyzvat, aby předvedl svůj způsob řešení třídě. Jedná se o propedeutickou úlohu vedoucí k budování schématu obsah obdélníka jako součin jeho dvou rozměrů.

Propedeutické úlohy týkající se obvodu čtyřúhelníku jsou zařazovány především v prostředí Dřívek (3.4.3), kde ale není prvotním cílem určit obvod daného čtyřúhelníku. Jako propedeutické je možné označit takové úlohy, kde je úkolem určit obvod obrazce, ale předpokládá se jeho určení jako součet délek stran daného mnohoúhelníku. Při opakovaném počítání obvodu obrazce dochází pak k odvození obecných vztahů pro výpočet obvodu čtyřúhelníků.

Úloha OBS_02 převzatá úloha: M2/3/10/3 výuková/diagnostická úloha

Cíl: Žák určí obvod čtyřúhelníku pomocí jednotky 1 dřívko.

Zadání:



Obrázek 19: Zadání úlohy OBS_02 (Hejný a kol., 2008, Učebnice pro 2. ročník, 3. díl, s. 10)

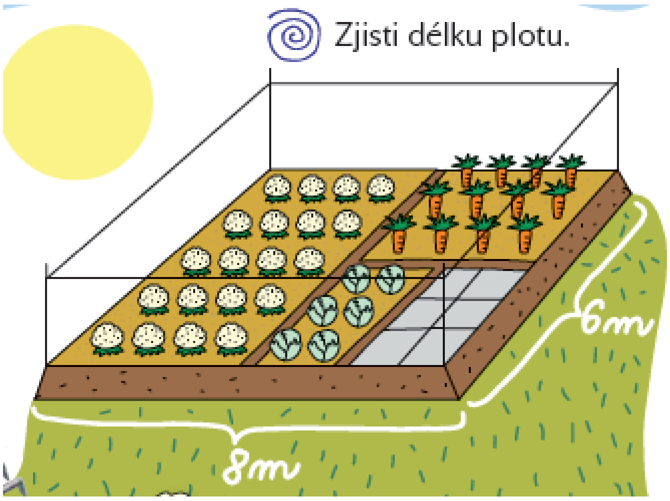
I tentokrát se jedná o úlohu, kdy učitel především sleduje strategie řešení u jednotlivých žáků. Všech pět obrazců má stejný obvod (ale různý obsah), protože obrazce byly vytvořeny ze základního čtverce přemisťováním některých obvodových dřívek. Učitel sleduje, zda žák počet dřívek nejprve určí a teprve potom vytvoří vlastní obrazec. Někteří žáci začínají tím, že pomocí obrázku určí počet dřívek, který si potřebují připravit a teprve pak vytvoří daný obrazec. Jiní vytvářejí podle obrázku tvar daného objektu a teprve po dokončení určí počet použitých dřívek. Určitě se ale najde vždy alespoň jeden žák, který zjistí, že se jedná o stejnou hodnotu obvodu pro všechny obrazce. Tento žák své zjištění většinou umí zdůvodnit vlastním jazykem, kterým vyjádří shodnost velikosti obvodu u všech obrazců. Úloha přispívá do schématu rovinných útvarů se stejným obvodem, ale různým obsahem a je zároveň propedeutickou úlohou pro určení maximálního a minimálního obsahu za daného obvodu. Nadaný žák může být učitelem vyzván k vytvoření všech rovinných útvarů, které mají každou dvojici sousedních stran navzájem kolmou a mají shodný obvod.

Kromě propedeutických úloh jsou zde zařazovány i úlohy z reálného života. Jedná se o takové úlohy, které vycházejí ze zkušenosti dětí s danou problematikou.

Úloha OBS_03 převzatá úloha: M2/2/44/hra motivační úloha

Cíl: Žák určí délku plotu kolem zahrady obdélníkového tvaru pomocí obrázku.

Zadání:



Obrázek 20: Zadání úlohy OBS_03 (Hejný a kol., 2008, Učebnice pro 2. ročník, 2. díl, s. 44)

Jedná se o úlohu, která vychází ze zkušenosti, kdy je potřeba určit délku plotu kolem pozemku obdélníkového tvaru. I zde se objevují různé strategie řešení. Po prvotním určení délek jednotlivých částí plotu včetně zdůvodnění shodnosti protilehlých stran je možné určit celkový obvod nejméně třemi způsoby. Jedním způsobem je prosté postupné přičítání jednotlivých délek (8 m + 6 m + 8 m + 6 m) dalším způsobem je užití násobení a následné sečtení dílčích výsledků (2 x 8 m + 2 x 6 m) nebo užití součtu sousedních stran a následné zdvojnásobení ((8 m + 6 m) x 2). Všechny tyto strategie vedou ke správnému výsledku a jsou příspěvkem do schématu výpočtu obvodu obdélníku.

Dalším typem úloh jsou takové úlohy, kdy v obrázku je potřeba určit obdélníky, které mají zadaný obsah.

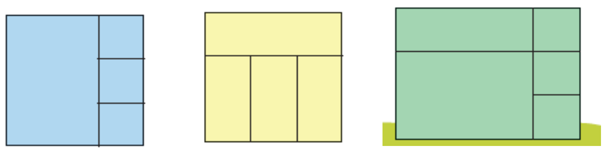
Úloha OBS_04 převzatá úloha: M2/3/31/3 výuková úloha

Cíl: Žák najde obdélník daného obsahu, určí počet shodných obdélníků, rozlišuje obdélník a čtverec.

Zadání:

3 Kolik je v modrém obrázku obdélníků ze 2 kachlíků?
Kolik ze 3? Kolik ze 4? atd.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
MODRÁ											
ŽLUTÁ											
ZELENÁ											



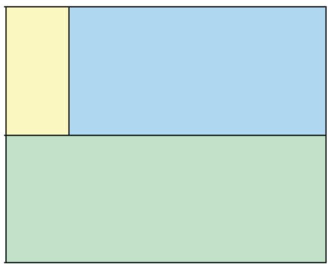
Obrázek 21: Zadání úlohy OBS_04 (Hejný a kol., 2008, Učebnice pro 2. ročník, 2. díl, s. 31)

Tato úloha propojuje různé geometrické poznatky, které jsou přítomny v několika předchozích cvičeních. V prvé řadě je nutno nalézt v daném obrazci všechny obdélníky a odlišit je od čtverců a dalších mnohoúhelníků. Dále je potřeba umět určit, z kolika kachlíků je každý obdélník složen. No a v neposlední řadě zde žáci prokáží schopnost evidence jistého jevu (počet obdélníků stejného obsahu) tabulkou. Učitel by mohl očekávat, že ve sloupcích označených číslicí 4 a 9 se objeví různé vyplněné údaje. Ve žlutém obrazci se nacházejí dva čtverce o obsahu 4 kachlíky a v každém obrazci se nachází jeden čtverec o obsahu 9 kachlíků. Není vhodné na tuto chybu žáky okamžitě upozorňovat (pokud ji udělají), ale vyčkat, až někdo na tuto nesrovnalost upozorní. Pokud se tomu tak nestane, učitel zpochybní správnost vyplněné tabulky a může očekávat, že se rozvine diskuze, která nakonec povede k rozhodnutí, že čtverec nepovažujeme za obdélník.

Úloha OBS_05 převzatá úloha: M3/62/3 výuková úloha

Cíl: Žák určí rozměry obdélníků měřením (s přesností na cm) a vypočítá obvod a obsah každého obdélníku.

Zadání: Kolik je na obrázku čtyřúhelníků? Zjisti jejich rozměry, obsahy a obvody.



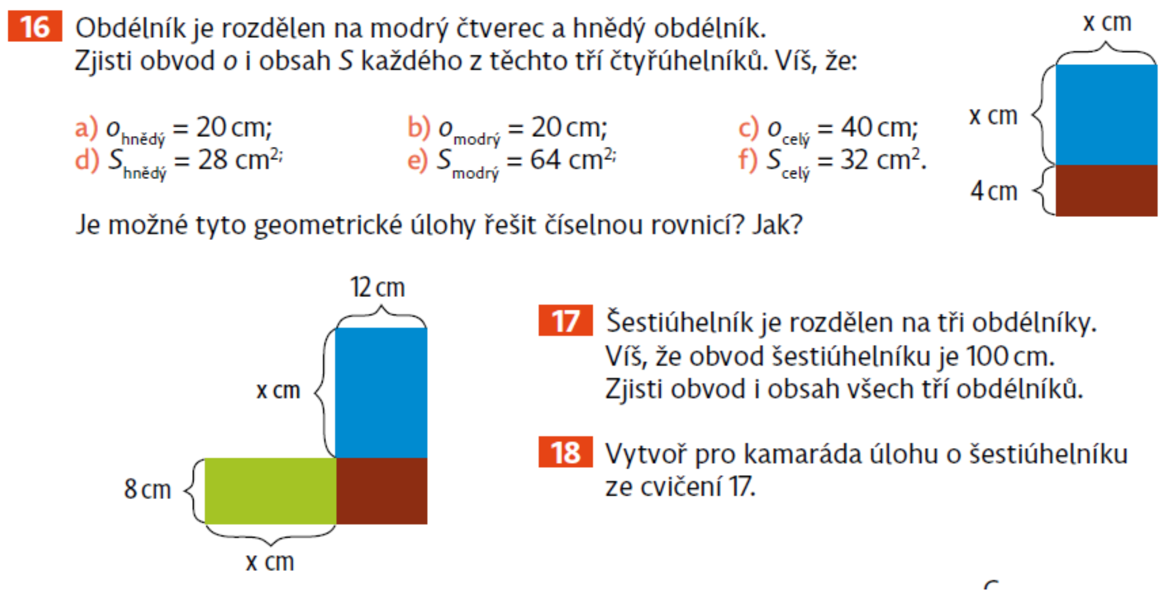
Obrázek 22: Zadání úlohy OBS_05 (Hejný a kol., 2009, Učebnice pro 3. očník, s. 62)

Jedná se o typickou úlohu vyžadující výpočet obvodu a obsahu obdélníku. Není zde však zadán žádný rozměr, takže žáci jsou donuceni k vlastnímu měření délek stran u všech pěti obdélníků. Někomu bude stačit určit rozměry žlutého a modrého obdélníku a rozměry ostatních hravě dopočítá, někdo bude měřit všechny rozměry. Tabulka pro záznam naměřených a vypočítaných údajů zde není nabídnuta, ale je vhodné ji sestavit, a tím přehledně uvést všechny požadované údaje. Není předepsán ani nabídnut žádný univerzální způsob výpočtu obvodu a obsahu, je jen na žácích, jakou strategii výpočtu použijí.

V posledních dvou ročnících 1. stupně jsou žákům již nabízeny úlohy, kdy je obrazec složen ze dvou či více obdélníků/čtverců. U výsledného obrazce je známo vždy několik údajů: některé rozměry, některé obvody a některé obsahy. Vzájemnou kombinací zadaných údajů vznikají úlohy různé obtížnosti, takže učitel může na základě stejného obrázku vhodně zvolit odpovídající úlohu pro každého žáka. Další variantou je také vlastní žákova volba vhodně obtížné úlohy. Porozumění dané problematice žák prokáže při vlastní tvorbě úlohy pro kamaráda, k čemuž je také vyzván.

Úloha OBS_06 převzatá úloha: M5/46/16,17,18 výuková úloha

Cíl: Žák určí chybějící rozměry všech obdélníků a chybějící údaje o jejich obvodu a obsahu.


16 Obdélník je rozdělen na modrý čtverec a hnědý obdélník.
Zjisti obvod *o* i obsah *S* každého z těchto tří čtyřúhelníků. Víš, že:

a) $o_{hnědý} = 20$ cm; b) $o_{modrý} = 20$ cm; c) $o_{celý} = 40$ cm;
d) $S_{hnědý} = 28$ cm^2; e) $S_{modrý} = 64$ cm^2; f) $S_{celý} = 32$ cm^2.

Je možné tyto geometrické úlohy řešit číselnou rovnicí? Jak?

17 Šestiúhelník je rozdělen na tři obdélníky.
Víš, že obvod šestiúhelníku je 100 cm.
Zjisti obvod i obsah všech tří obdélníků.

18 Vytvoř pro kamaráda úlohu o šestiúhelníku ze cvičení 17.

Obrázek 23: Zadání úlohy OBS_06 (Hejný a kol., 2011, Učebnice pro 5. ročník, s. 46)

Všechny výše uvedené úlohy přispívají k budování schématu obvod a obsah rovinného útvaru. Jejich úspěšným řešením jsou plněny očekávané výstupy z RVP pro 2. období 1. stupně, a to M-5-3-02 a M-5-3-04 (Příloha 15).

3.5.2 Úlohy pro projekt GA ČR – Kritická místa matematiky na základní škole.

Při spolupráci na projektu GA ČR jsem vytvořila sadu úloh (Příloha 10), která byla využita pro hloubkové rozhovory se žáky. Tato sada úloh vznikla podle oblastí, které vyjmenovali oslovení učitelé v první fázi projektu jako kritické z pohledu obtíží žáků v matematice (Rendl, Vondrová a kol., 2013). Velmi často zmiňovanou oblastí byla geometrie, i když ji učitelé zužovali na konstrukce rovinných útvarů a užití vzorců pro výpočty obvodů/obsahů rovinných útvarů a povrchů/objemů prostorových útvarů.

Za výchozí materiál pro tvorbu úloh byly brány učebnice, které jsou nejčastěji používány našimi učiteli a také pokrývají největší část našeho trhu – učebnice matematiky pro 1. stupeň základní školy z Nakladatelství Alter. Za základ pro tvorbu úloh byly tedy použity především úlohy z učebnice pro 4. a 5. ročník základní školy z Nakladatelství Alter. První zmínka o obvodu je v učebnici pro 4. ročník na s. 96, kde se děti seznámí s úlohou znázorněnou obrázkem pozemku ve tvaru trojúhelníku vedoucí k určení jeho obvodu. Poté se děti seznámí s obecným algebraickým vzorcem pro výpočet obvodu trojúhelníku $o = a + b + c$ ve zvýrazněném rámečku a pak jsou zařazeny aplikační úlohy, kde tento vzorec používají pro zjištění správného výsledku. Stejným nebo hodně podobným způsobem jsou děti seznámeny se vztahy pro obvod obdélníku a čtverce (s. 105 a 106) a pro obsah obdélníku a čtverce (s. 130 a 132). V učebnici pro 5. ročník se pak objevují kapitoly, které shrnují, opakují a upevňují učivo o obvodu všech tří rovinných útvarů na s. 34 a učivo o obsahu obdélníku a čtverce na s. 67.

Pro zjištění, zda i žáci pociťují tuto oblast školské matematiky jako problémovou, byla tedy vytvořena sada devíti úloh, které typově vycházely z výše uvedených učebnic. Všechny úlohy jsou autorské, i když zcela záměrně velmi podobné (formulačně i situačně) úlohám z výše uvedené učebnice. Celou sadu úloh (Příloha 10) můžeme rozdělit do tří skupin.

První čtyři úlohy (OBS_11, OBS_12, OBS_13 a OBS_14) byly situačně zasazeny do reálného kontextu blízkého dětem daného věku, který se ale také objevuje v uvedených učebnicích. Jednalo se o pastvinu, zahradu, těsnění okna a plochu koberce. Úlohy byly zformulovány tak, aby jejich řešení bylo do jisté míry tradiční, v podstatě bylo možno vycházet z představy nebo použít vzorec. Cílem těchto úloh bylo zjištění, zda žák rozumí pojmu obvod a obsah v reálném kontextu. V úlohách nebyly žádné další „záludnosti“ vyžadující např. převod jednotek. K vyřešení každé úlohy stačilo provést jednu početní operaci (u obvodu obdélníku dvě operace). Slovo obvod ani obsah se v žádném zadání neobjevilo, správné vyřešení záviselo na porozumění reálné situaci a na provedení odpovídajícího algoritmu.

Druhou skupinu úloh tvoří úlohy (OBS_15, OBS_16 a OBS_17), které již nebyly zcela tradiční. Nákup materiálu na hedvábné šátky, vydláždění terasy ani obšití ubrusu krajkovým lemem není zcela obvyklé pro děti mladšího školního věku. Při řešení těchto úloh bylo také potřeba znát některé další pojmy, např. čtverečný metr. Při vlastním řešení bylo potřeba řetězit více než dvě početní operace. Jejich zařazení bylo motivováno snahou poznat, zda jsou žáci svázáni svými dosavadními znalostmi o obvodech a obsazích a budou se snažit aplikovat algebraické užití základních vztahů, nebo zda budou vycházet z jiného pracovního postupu. Byly vybrány náročnější sémantické situace, které byly upraveny pro potřeby zjednodušení numerického výpočtu. Např. cena hedvábí u dodavatele neodpovídá zcela přesně realitě. V každé z těchto tří úloh byla vždy alespoň jedna další „záludnost“ – nutnost představy základní jednotky obsahu jeden čtverečný metr (OBS_15), inverzní operace nutná k vyřešení úlohy (OBS_16) či převod jednotek před vlastním výpočtem (OBS_17).

Poslední, třetí skupinu tvořily dvě zcela tradiční úlohy (OBS_18 a OBS_19) bez reálného kontextu. Zadání bylo uvedeno tradiční větou: Vypočítej obvod a obsah čtverce/obdélníku, když … Tyto úlohy byly zařazeny jako protipól úloh z první skupiny (OBS_11, OBS_12, OBS_13 a OBS_14). Cílem bylo porovnávat strategie řešení úloh, které se týkají stejného schématu (obvod a obsah rovinného útvaru), ale v prvním případě uvedeným v reálném kontextu a v druhém případě bez tohoto kontextu.

3.6 Charakteristika výzkumné skupiny

Můj dlouhodobý výzkum byl zahájen v září 2010, kdy jsem začala systematicky vyučovat ve třídě 1. B na FZŠ Táborská, Praha 4.

Do prvního ročníku byly přijaty děti ze spádové oblasti, nebyly prováděny žádné přijímací pohovory, nebyl proveden žádný výběr dětí. V průběhu pěti let výuky na I. stupni se složení třídy proměňovalo v závislosti na přirozené fluktuaci rodin v dané oblasti. Konkrétní počty dětí uvádím vždy k 1. září daného školního roku. Vzhledem k nízkému počtu členů výzkumné skupiny jsem nikdy neprováděla kvantitativní analýzu ani statistické vyhodnocení jednotlivých experimentů.

Při nástupu každého dítěte do uvedené školy rodiče podepisují tzv. „Informovaný souhlas s pořizováním vizuálních, zvukových i jiných záznamů z výuky.“ Výslovně jsem si také nechala podepsat souhlas rodičů s využitím žákovských prací pro potřeby této disertační práce. Všechna konkrétní jména uvedená v práci jsou změněna, nejedná se o skutečné označení dětí, ale o jejich vymyšlené pracovní přezdívky.

Evidenci počtu dětí, které se zúčastňovaly některých experimentů v rámci jednotlivých případových studií ve sledovaném období, uvádím v následující tabulce.

Školní rok	dívky	chlapci	Celkem
2010/2011	13	11	24
2011/2012	14	9	23
2012/2013	10	9	19
2013/2014	12	10	22
2014/2015	11	10	21

Tabulka 1: Přehled počtu dětí v jednotlivých ročnících

4 Konkrétní případové studie a jejich analýza

Případové studie, které budu dále uvádět, jsou součástí historie jedné třídy. Tato historie zde nebude uvedena jako úplná, vybírám jen několik situací, které se udály od 1. září 2010. Jednotlivé případy jsem volila tak, abych ukázala hlavní směry geometrického poznávání žáků, především s ohledem na výzkumnou otázku: Jaká geometrická schémata si při svém poznávání vytvářejí (kapitola 1.5). Každá případová studie se týká jednoho geometrického prostředí, nejsou uspořádány chronologicky, ale s ohledem na pozorovaný jev.

4.1 Volba vhodné didaktické situace z obecného hlediska

První situaci jsem u žádné případové studie nijak předem nepřipravovala. Ta vždy vyplynula z běžně připravené hodiny. Vždy se ale vyskytl v této hodině zlomový okamžik, který vedl k vyslovení dílčí hypotézy týkající se konkrétního poznání a který byl impulsem pro další nestandardní didaktickou práci buď s jedním konkrétním žákem, nebo s několika žáky, nebo se všemi žáky třídy. Po důkladném rozboru první situace jsem vždy přistoupila k naplánování další aktivity, která by mohla moji dílčí hypotézu potvrdit, případně vyvrátit. Některé fragmenty z dále uvedených studií byly použity v článcích publikovaných na několika konferencích (Kloboučková, 2011, 2012, 2014).

4.2 Případová studie č. 1: Krychlové stavby – 3D geometrie

V následujícím textu podrobně popíši, jak se „objev“ jednoho žáka postupně šířil mezi ostatní žáky. Odehrálo se to v prostředí krychlových staveb. Nejprve uvedu objev strategie, jak najít všechny krychlové stavby ze čtyř krychlí. Budu ilustrovat, jak výborné kombinatorické schopnosti jednoho žáka ovlivnily poznávání stejné situace u dalších žáků. Pokusím se také poukázat na možnosti zařazení nestandardních úloh do výuky matematiky v duchu VOBS.

Uvedená případová studie mapuje časový interval březen 2010 (1. třída) - listopad 2011 (2. třída).

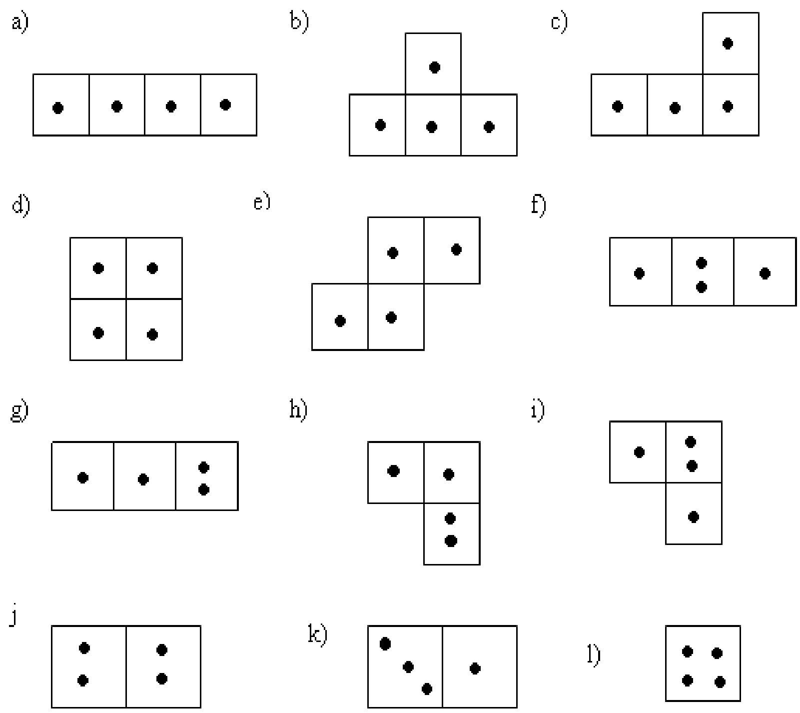
4.2.1 Objem a výška krychlové stavby

V březnu 2011 byl při běžné výuce (Příloha 02: Podrobný scénář hodiny Krychlové stavby) pozorován zajímavý jev u žáka Víta.

Před začátkem skupinové aktivity byli žáci náhodně rozděleni do čtyř skupin po 4–6 žácích. Každá skupina měla k dispozici libovolný počet krychlí a čtverečkovaný papír se čtverci odpovídajícími rozměrům krychle. Zadání úkolu (KS_03a) bylo žákům prezentováno ústně: „Vytvořte libovolnou krychlovou stavbu, na kterou použijete přesně čtyři krychle a zaznamenejte její plán do čtverečkovaného papíru. Takto postupujte dále a snažte se postavit co nejvíce různých staveb.“ Každá skupina pracovala svým tempem.

Ve skupině tří dívek byl jako čtvrtý žák Vít. Ten se ujal role koordinátora práce. Dívky stavěly a Vít rozhodoval o tom, kterou stavbu mají i zaevidovat. Po chvilce, před uplynutím časového limitu hlásil, že už mají hotovo. Na otázku, kolik jich mají, odpověděl Vít: „No, máme jich dvanáct a to je všechno.“ Jeho tvrzení jsem zpochybnila otázkou, ale Vít si byl jist: „To už prostě víc nejde.“ Své přesvědčení dokázal: „No když tady z té vysoké (ukazuje nejvyšší stavbu) vezmu tu horní kostku, tak ji musím dát takhle vedle. A to tady máme (ukazuje odpovídající stavbu). A když tady zase vezmu tu horní, tak to můžeme dát (ukazuje stále u původní stavby) sem, sem, sem, sem, nebo sem (ukáže všechny možnosti přesunu kostky). A to tady taky všechno máme (ukáže rukou obecně ostatní stavby). A u těch nízkých to je stejné.“ Bylo ale zřejmé, že ostatní děti Vítovu rychlému zdůvodňování ne docela rozumí a chtěly se samy přesvědčit o tom, že již další novou stavbu nepostaví (Příloha 11: Protokol experimentu z 2. 3. 2010).

V závěru hodiny jednotlivé skupiny prezentovaly své výsledky. Skupiny nalezly pět, osm a dvanáct (po korekci ostatních deset) různých staveb. Za shodné považovali i nepřímo shodné stavby. Vít prezentoval řešení jeho skupiny. V tom okamžiku zvonilo a nebylo ho slyšet, ale podle pohybu jeho rukou lze usuzovat, že opět ukazuje způsob, jak vyčerpat všechny možnosti rozdělením staveb podle jejich výšky a vytvořením všech staveb o stejné výšce. Domnívám se, že Vít demonstroval, že našel něco, co jednotlivé stavby propojuje, stavby ve své mysli uspořádal a u každé až na poslední věděl, která stavba následuje. Dalo by se říci, že stručným popisem skupiny staveb si vytvořil generický model (Hejný, 2011) strategie stavění **všech** staveb ze 4 krychlí.



Obrázek 24: Přehled všech plánů KS ze čtyř krychlí

Tato skutečnost mě vedla k pokračování experimentu, jehož cílem bylo zjistit trvalost tohoto generického modelu v mysli Víta, jeho modifikovatelnost v jiném kontextu a jeho přenos na jiné žáky, který nazýváme kognitivní osmóza[7] (Hejný, 2011).

Na další hodině 7. 3. 2011 byl všem žákům kromě Víta ústně zadán tento úkol (KS_03a): „Vezměte si pouze čtyři krychle, ne více. Postavte ze všech čtyř krychlí stavbu a zaznamenejte její plán na čtverečkovaný papír. Pak z těch samých krychlí postavte jinou stavbu a také ji zaznamenejte. Pokuste se najít co nejvíce různých staveb.“ Žákům byla ponechána volnost v rozhodnutí, zda budou pracovat ve dvojici s libovolným spolužákem či samostatně. Očekávala jsem, že nejbližší spolupracovnice Víta (Stefanie, Valerie, Sofie)

[7] Jev, kdy nové poznání žák přebírá od spolužáků, tedy osob, které jsou na stejné či podobné mentální úrovni, nazýváme kognitivní osmózou (Hejný, 2014).

budou postupovat podle „jeho návodu“. To se však nepotvrdilo. Pravděpodobně si Vít vytvořil generický model až na konci společné práce a tak svůj „objev“ s ostatními žáky nestačil sdílet. Všechny tři dívky znovu stavěly téměř náhodně, jednotlivé stavby zaznamenávaly na čtverečkovaný papír a teprve pak porovnávaly, zda se právě vytvořená stavba neshoduje s některými předchozími. Stefanie (označeno zeleně) si ale pamatovala, že staveb bylo předchozí hodinu nalezeno 12, proto cíleně hledala 12 staveb, což se jí nakonec také jako jediné povedlo. Všech dvanáct staveb znovu nalezla také Valerie a Sofie, ale uvedly i dvě stavby opakovaně. Všechny tři spolupracovnice Víta byly tedy úspěšné, ale nepotvrdilo se, že budou pracovat systematicky, jak jim to v předchozí hodině předvedl Vít. Ani nikdo z ostatních žáků nepracoval tak systematicky jako Vít, dokonce nikdo další neuvedl kompletní řešení (Tabulka 2).

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	j)	k)	l)	Σ
Jonáš, Jaroslav	A	A 2x	-	A	A	-	A	-	-	A 2x	A	A	8
Sofie, Valerie	A	A	A	A	A	A 2x	A	A 3x	A	A	A	A	12
Štěpán	A	A 2x	A	A	A 2x	-	A	-	A	A 2x	A 2x	A	10
Jarmila	A	A	-	A	A 2x	A 2x	A	-	A	A	A	A	10
Martina Tatiana	A	-	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	11
Patrik	A	A 2x	A	A	A	A	-	-	A	A	A	A	10
Antonie, Jolana	A	A 4x	A 2x	-	A	A	-	-	A	A	A	-	8
Stefanie	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	12
Květa	A	A 3x	A 3x	A	A	A	A 2x	A	-	A	-	A	10
Vasil	A 2x	A	-	-	A	A	A	-	A	A	A 2x	A	9
Dušan, Viktor	A	-	-	A	A	A 2x	A 2x	-	-	-	-	-	5
Augusta	A	-	-	-	A	-	A	-	-	-	A	A	5
Andrea	A 2x	-	-	A	A	-	-	A	-	A	A	-	6
Jan, Martin	A	A	A 3x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	3
Celkový počet	14	10	8	10	13	9	10	5	8	11	11	10	

Tabulka 2: Přehled nalezených staveb

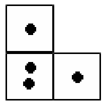
Vít pracoval samostatně na obměněné úloze (KS_04): „Vezmi si všechny své krychle. Postav co nejvíce staveb, ale takových, že na každou z nich použiješ právě pět krychlí a v prvním podlaží můžeš mít nejvýše 3 krychle. Zaznamenej jejich plány na čtverečkovaný papír.“ Očekávala jsem, že Vít použije „svou“ strategii. Tento předpoklad se rovněž nenaplnil. Pro Víta to byla totiž nová situace, ve které znovu prošel proces objevování od tvorby izolovaných modelů. Nezačínal tentokrát nejvyšší stavbou, ale nejprve zaplnil první podlaží třemi krychlemi, teprve pak zaplňoval další podlaží. V závěru práce se zeptal, zda v prvním podlaží mají být přesně nebo nejvýše tři krychle. Po zopakování zadání doplnil i poslední čtyři stavby. Z videozáznamu je patrné, že pohyby rukou při poslední kontrole ukazoval svou strategii v této situaci, tedy slovy teorie generických modelů si Vít vytvořil další generický model.

Obrázek 25: Záznam všech řešení Víta (KS_04)

4.2.2 Konstrukce krychlové stavby dané tabulkou (zaplněná podlaží)

Další experiment z prostředí krychlových staveb se uskutečnil v listopadu a prosinci roku 2011. Od prvního experimentu uběhlo šest výukových měsíců (a dva měsíce prázdnin) a během tohoto období byly dětem nepravidelně předkládány úlohy z prostředí Krychlových staveb, mimo jiné i takové, které vyžadovaly evidenci různých staveb, tak jak to vyžadoval časový harmonogram výuky. V listopadu 2011 byla dětem zadána tato úloha: „Postavte stavby podle uvedených plánů a zapište počet použitých kostek v jednotlivých podlažích u každé stavby do tabulky. (Hejný a kol., Učebnice matematiky pro 2. ročník, s. 44, drobná modifikace)“ Na pracovním listu (Příloha 06) žáci dostali tečkované plány osmi různých staveb vytvořených ze 4–6 krychlí, které byly odlišeny barevně, a připravenou tabulku pro zaznamenání počtu krychlí použitých v jednotlivých podlažích.

STAVBA	žlutá	…
Počet krychlí v 1. podlaží	3	
Počet krychlí v 2. podlaží	1	
Počet krychlí v 3. podlaží	0	
Počet krychlí v 4. podlaží	0	
Počet krychlí v celé stavbě	4	



Tabulka 3: Ilustrace zadaného úkolu

Po vyřešení úlohy ve skupinách proběhla ve třídě diskuse. Žákyně Květa si všimla, že jedna ze staveb je složena ze stejného počtu krychlí jako při předcházející hodině (Příloha 12: Protokol experimentu ze dne 12. 11. 2011). Jednalo se o stejně zapsanou evidenci počtu krychlí u dvou různých staveb. Spolužák jí vysvětlil, že když má stavba např. 3 krychle v prvním podlaží, tak může mít plán dva různé tvary (obdélník a „růžek“). A dvě krychle z druhého a třetího podlaží musí být sice v jednom čtverečku, ale mohou být vždy na dvou různých místech.

Na základě rozboru této situace jsem připravila na následující hodinu pokračování experimentu, kdy děti opět pracovaly ve skupinách. Každá skupina měla k dispozici sadu krychlí, čtverečkovaný papír a pracovní list se zadáním stejného úkolu (KS_05): „Vytvořte barevné stavby podle tabulky. Ke každé stavbě zapište její plán. Najděte všechna řešení.“

Barva stavby	červená	modrá	žlutá	zelená	fialová
Počet krychlí v 1. podlaží	3	3	2	2	1
Počet krychlí v 2. podlaží	2	1	2	1	1
Počet krychlí v 3. podlaží	0	1	1	1	1
Počet krychlí v 4. podlaží	0	0	0	1	1
Počet krychlí v celé stavbě	5	5	5	5	4

Tabulka 4: Zadání pro skupinovou práci

Z celkového počtu jedenácti (popřípadě třinácti včetně dvou rovinově souměrných) staveb byly ve skupinách nalezeny minimálně dvě a maximálně šest různých staveb splňujících zadání úkolu. Tento počet byl relativně nízký. Důvodem bylo zřejmě nedostatečný časový prostor a zařazení úlohy až na konec vyučovací hodiny.

Po deseti dnech následovalo další pokračování experimentu. Jednotlivé skupiny pracovaly odděleně a dokončovaly práci mimo vyučování zároveň s popisem své strategie. V jednotlivých skupinách byly nalezeny vždy po jedné stavbě od každé barvy, ale nebyla vůle k dalšímu hledání všech možností. Pouze Květa se pokusila o nalezení více variant, ale práci ukončila po nalezení dvou možností u červené a modré stavby, přičemž druhou možnost hledala až po znázornění všech pěti barevných staveb.

Tento experiment nesplnil mé očekávání, děti nebyly zřejmě motivovány k pokračování na vyčerpání všech možností. Svoji roli zřejmě sehrál i fakt, že pokračování experimentu jsem zařadila na odpoledne, kdy děti byly zvyklé trávit čas ve školní družině relaxací.

4.2.3 Vyhodnocení a shrnutí případové studie č. 1: Krychlové stavby – 3D geometrie

Případová studie ukazuje různé žákovské strategie při řešení problémů z prostředí krychlových staveb. Nepotvrdila se mi domněnka, že objev jednoho žáka a jeho sdělení ostatním povede bezprostředně k osvojení téhož poznatku jiným žákem. Přestože byly jednotlivé poznatky komunikovány spolužákem a nikoliv učitelem, tedy pro spolužáky srozumitelným jazykem, v dalších aktivitách uvedenou strategii ostatní žáci nepoužili. K tomu, aby se poznatek šířil mezi žáky, je potřeba být trpělivý a promyšleně vytvářet situace, které budou ostatní žáky motivovat k porozumění a osvojení, případně ovlastnění si daného poznatku. Pochopila jsem, že sdělení a vysvětlování učitele má minimální účinnost. Uvědomuji si, jak málo efektivní byla moje dřívější výuka, kdy jsem v dobré víře seznamovala děti s hotovými poznatky.

Beru si z této případové studie poučení pro další pedagogickou práci – nespěchat a posilovat sebevědomí dětí. Ty pak dokáží objevit skoro „celou matematiku“. Obtížným úkolem ale pro učitele zůstává, najít cestu přes série gradovaných úloh k tomu, aby každý žák mohl řešit v dané chvíli úlohu právě takové obtížnosti, na kterou tak tak dosáhne. Další otázkou a obtížným úkolem pro učitele je, jak vytvářet atmosféru motivující k poznání a k přijetí nového poznatku od spolužáka. Toto navrhuji jako téma další možné návazné práce, třeba diplomové – „Učitelova tvorba podmínek pro šíření poznatku kognitivní osmózou“.

4.3 Případová studie č. 2: Origami – překládání papíru

V následujícím textu podrobně popíšu, jak si žáci vzájemně předávají své „objevy“ při práci v prostředí origami. Nejprve se pokusím popsat situaci, kterou jsem zaznamenala při běžné výuce. Dále se budu zabývat následně připraveným experimentem, kterým chci ověřit platnost hypotézy, že se děti nejvíce učí tehdy, když si vzájemně předávají své poznatky vlastním jazykem. Pokusím se také ukázat na propojení běžné výuky v duchu VOBS a možnosti zařazení nestandardních úloh do výuky matematiky.

Uvedená případová studie mapuje časový interval září 2010 (1. třída) - březen 2015 (5. třída).

4.3.1 Čtverec rozdělený na obdélník, trojúhelník a pravoúhlý lichoběžník

V září 2010 byl při běžné výuce (Příloha 03: Podrobný scénář hodiny Origami) pozorován zajímavý jev u žáka Jana.

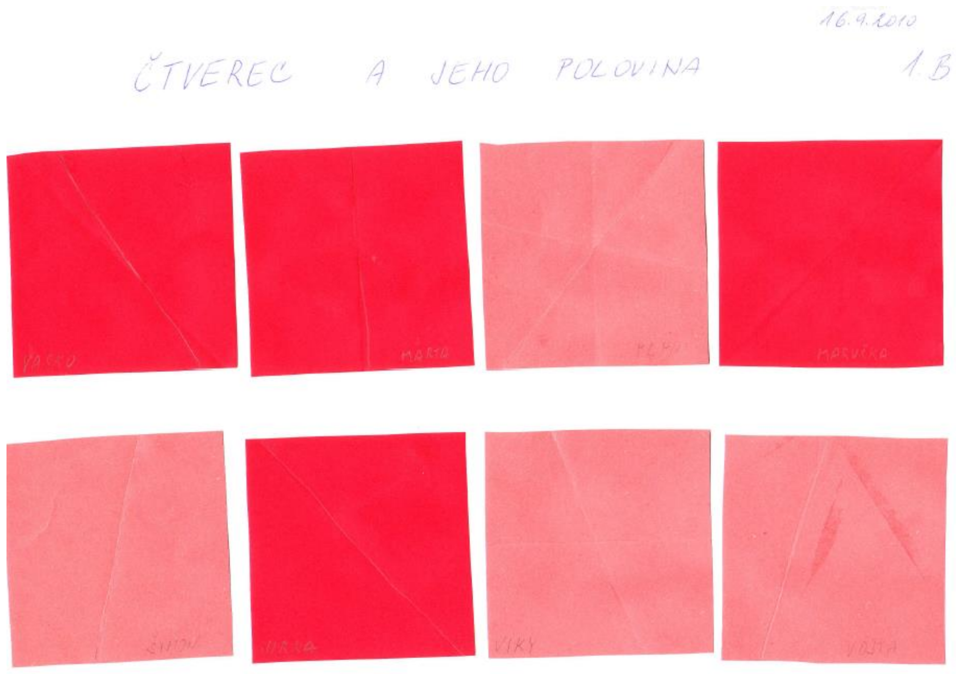
Před začátkem předposlední části hodiny (Příloha 03: Podrobný scénář hodiny Origami) byly každému z dětí rozdány dva barevné čtverce. Očekávala jsem, že každé z dětí provede přehnutí buď po úhlopříčce, nebo po spojnici středů protějších stran. Počítala jsem s tím, že u druhého čtverce provede každé dítě druhou možnost. Po ústním zadání úlohy, aby děti přehnuly jeden ze čtverců barevného papíru na dvě stejné části, přibližně polovina dětí provedla přehnutí podle úhlopříčky a vytvořila dva shodné pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky, druhá část třídy vytvořila dva shodné obdélníky. Jeden žák s problémy s jemnou motorikou (Jan) se snažil přehnout čtverec podle úhlopříčky, ale to se mu nepodařilo přesně. Přehnul svůj čtverec na dva shodné pravoúhlé lichoběžníky. Jiný žák (Štěpán) odhalil, že se jedná o dva shodné útvary, ale neuměl je pojmenovat. Důkaz provedl za spolupráce s jiným žákem přestřižením a přiložením k sobě tak, že se obě části překrývaly (Příloha 13: Protokol experimentu ze dne 16. 9. 2010). Ode mne se děti dozvěděly název náhodně vytvořeného útvaru – pravoúhlý lichoběžník.

Při přehýbání druhého připraveného čtverce se všechny děti nepokusily o přehnutí očekávaným způsobem (podle úhlopříčky nebo podle spojnice protějších středů), ale o vytvoření dvou pravoúhlých lichoběžníků. Zdaleka ne všem se to skutečně podařilo, protože prozatím neobjevily, že vzdálenost přehybu od strany čtverce musí být konstantní. To je ale neodradilo od dalšího zkoušení tak dlouho, dokud nebyly se svým výsledkem spokojeny. V závěru hodiny jsme uspořádaly výstavu všech přehnutých čtverců, kdy se téměř neobjevily dva shodně přehnuté čtverce (viz obr. 24). Domnívám se, že u žáků došlo vlivem kognitivní osmózy k vytvoření generického modelu rozdělení čtverce na dva shodné rovinné útvary nekonečně mnoha způsoby.

Tato příhoda mě vedla k pokračování experimentu, kdy jsem se rozhodla ověřit, zda objev jednoho žáka se rozšíří do mentálního schématu ostatních žáků tak, že objevenou vlastnost čtverce použijí i u typově jiné úlohy. Úlohu vyžadující použít poznatek, kdy čtverec je možné přehnutím rozdělit nejen na dva shodné rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky nebo obdélníky, ale i na dva shodné pravoúhlé lichoběžníky, jsem se rozhodla zařadit po uplynutí určitého času znovu do výuky.

4.3.2 Skládání čtverce ze dvou shodných tvarů.

V období od září do ledna daného školního roku byly v průběhu výuky řešeny mnohé úlohy se stejnou nebo hodně podobnou problematikou z prostředí Origami. V hodinách jsme společně překládali dále papír na čtvrtiny (O_01), vystřihovali různé dečky (O_02), pokusili jsme se i vytvoření tří stejných částí z obdélníku. Při společné práci jsme hodně diskutovali o způsobech řešení každého úkolu, vzájemně jsme si radili a zdařilé výrobky jsme vystavovali na nástěnce.



Obrázek 26: Čtverec a jeho polovina (obrázek z nástěnky)

Pokračování výukového experimentu jsem zařadila do výuky v úterý 25. 1. 2011, kdy jsem připravila pracovní list (Příloha 07), ve kterém byl znázorněn čtverec a volně rozmístěno 10 různých částí tohoto čtverce. Úkolem žáků bylo vybarvit stejnou barvou ty dílky, ze kterých je možné poskládat čtverec. Díly, ze kterých to není možné, zůstanou nevybarvené. Žáci dostali k dispozici také jeden čtverec i stejnou sadu dílů vystřiženou z papíru (O_05).

Při vyplňování pracovního listu všichni žáci použili nabídnuté díly. Někteří je používali od samého počátku k řešení, bylo však několik žáků (na videozáznamu je patrné, že se jedná nejméně o čtyři žáky), kteří nejprve rozhodli, které díly patří k sobě a teprve pak si ověřili pomocí vystříhaných dílů, že tomu tak skutečně je, že jejich předchozí úvaha je správná.

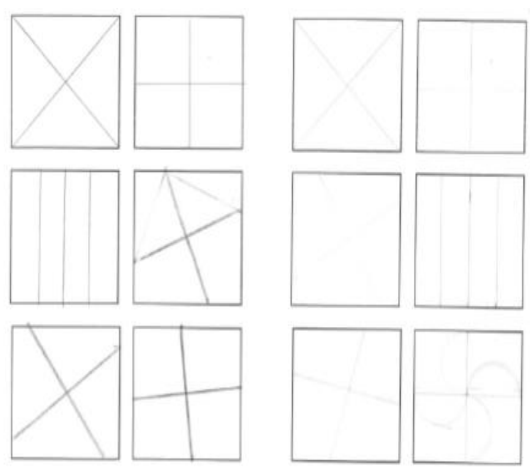
Ve všech vyplněných pracovních listech byly vybarveny stejnou barvou dva trojúhelníky i dva obdélníky (jednou byla vidět korekce gumováním a opětovným přebarvováním jednoho lichoběžníku – hodně se blížil k obdélníku). Z přítomných 19 žáků, bylo deset prací stoprocentně úspěšných, dalších pět žáků správně vybralo z dalších lichoběžníků jednu dvojici odpovídající čtverci, ostatní zůstalo nevybarveno. Tři žáci vybarvili všechny objekty, ale dvě dvojice přiřadili chybně a jeden žák nevybarvil žádný z uvedených lichoběžníků.

4.3.3 Dělení čtverce na čtvrtiny

Pokračování (a prozatím i ukončení) celé případové studie zaměřené na problematiku Origami jsem si uvědomila bez cílené přípravy v průběhu 5. ročníku, konkrétně v březnu 2015.

V průběhu výuky žáci řešili celou řadu úloh, které se nějakým způsobem týkaly problematiky jak zlomků, tak základních rovinných útvarů. Postupně docházelo k zpřesňování používané geometrické terminologie, také navrhovali různé modely pro znázornění zlomků.

Při jedné samostatné práci dne 31. 3. 2015 měl každý žák k dispozici několik listů se šesti čtverci a úkolem bylo na každý list znázornit grafické rozdělení těchto čtverců na poloviny, třetiny, čtvrtiny, pětiny, …, ale tak, aby každé další dělení bylo jiné (tedy aby nevznikly dvě graficky stejná dělení). Zaujalo mě řešení týkající se vyznačení čtvrtin, které jsem podrobněji vyhodnotila (Tabulka 5) a uvádím i dvě žákovská řešení.



Obrázek 27: Ukázka dvou žákovských řešení Origami

Každý z žáků (19 přítomných) provedl oba základní způsoby dělení čtverce (na čtyři shodné trojúhelníky i čtverce), téměř všichni také provedli dělení dalšími dvěma způsoby. Z toho někteří z nich (12) provedli dělení alespoň jedním způsobem na dva lichoběžníky, které dále dělili na obecné čtyřúhelníky. Není bez zajímavosti, že v osmi pracovních listech bylo možné evidovat snahu o použití kružítka, i když ne vždy byla tato snaha graficky přesně provedena. Jednotlivé práce se nelišily pouze přesností v rýsování, ale dá se konstatovat, že každá práce byla originální, přestože žáci při práci na sebe viděli a mohli se tudíž vzájemně inspirovat.

	čtverce	trojúhelníky	obdélníky	obecné čtyřúhelníky	kružnice	správných řešení
Květa	A	A	A	A 2x	A	6
Štěpán	A	A	A 2x	A 2x	-	6
Tatiana	A	A	A	A 3x	-	6
Vasil	A	A 2x	A	A	A	6
Vít	A	A	A	A 3x	-	6
Jaroslav	A	A	-	A 2x	A	5
Augusta	A	A	A 2x	-	-	4
Patrik	A	A	A	A	-	4
Valerie	A	A	A	-	A	4
Antonie	A	A	-	A	-	3
Helena	A	A	-	A	-	3
Jonáš	A	A	-	A 3x	-	3
Martin	A	A	A	A	A	3
Nikola	A	A	A	A	A	3
Andrea	A	A	A	-	-	2
Adéla	A	A	A	-	A	2
Karel	A	A	A	A	A	2
Martina	A 2x	A	A	-	-	2
Viktor	A	A	-	-	-	2

Tabulka 5: Dělení čtverce na čtvrtiny - vyhodnocení

4.3.4 Vyhodnocení a shrnutí případové studie č. 2: Origami – překládání papíru

Případová studie ukazuje různé žákovské strategie při řešení problémů z prostředí origami. Zde mohu konstatovat, že velmi silná emociálně prožitá situace týkající se jednoho žáka a jeho náhodného objevu zapůsobila i na ostatní účastníky. Zde jsem mohla okamžitě vidět vliv prožitku s nalezením pravoúhlého lichoběžníku, neboť všichni se alespoň pokusili o vytvoření stejného obrazce, i když ne se stoprocentním výsledkem. Přesto si tuto situaci zřejmě velmi pamatují. To se projevilo i mnohem později, kdy si troufám tvrdit, že jedna zkušenost v prostředí origami ovlivnila i oblast zlomků a dělení čtverce na čtvrtiny.

4.4 Případová studie č. 3: Dřívková geometrie

V následujícím textu podrobně popíšu, jak si žáci vzájemně předávají své „objevy“ při práci v prostředí dřívkové geometrie. Nejprve se budu zabývat objevem pravidelnosti při tvorbě řady čtverců a rovnostranných trojúhelníků. Budu ilustrovat, jak zjištění pravidel pro aritmetickou posloupnost u jednoho žáka ovlivní poznávání stejné situace u dalších žáků. Pokusím se také ukázat na propojení běžné výuky v duchu VOBS a možnosti zařazení nestandardních úloh do výuky matematiky.

Uvedená případová studie mapuje časový interval říjen 2012 (3. třída) - duben 2013 (3. třída).

4.4.1 Aritmetická posloupnost v geometrii – čtverec, trojúhelník

V říjnu 2012 byl při běžné výuce (Příloha 04: Podrobný scénář hodiny Dřívka) pozorován zajímavý jev u žákyně Antonie.

Hodina byla motivačně připravena jako práce farmáře, který má mnoho úkolů. Jedním z úkolů bylo vytvořit výběhy, které si farmář vyrábí spojováním stejných dílů (dřívek). Nejmenším zvířetem, které farmář chová na své farmě, jsou slepice. Proto pro ně vyrábí výběhy ve tvaru rovnostranného trojúhelníku. Pro husy potřebuje větší výběh, a to ve tvaru čtverce. Farmář chce co nejvíce ušetřit, proto vyrábí jednotlivé výběhy tak, že je napojuje do jedné řady.

V učebnici byl znázorněn obrázek znázorňující zadání úlohy (D_04) s otázkami. Kolik potřebuješ dřívek k vytvoření pěti, deseti, čtyřiceti trojúhelníkových oken (výběhů pro slepice)? Kolik potřebuješ dřívek k vytvoření čtyř, deseti, třiceti tří čtvercových oken (výběhů pro husy)? V pracovním sešitě je připravena tabulka, kde byla pouze čísla 1 a 2 jako počet oken, a čísla 16, resp. 11 jako počet dřívek. Vše ostatní děti doplňovaly dle vlastního uvážení. K dispozici měla každá dvojice libovolný počet dřívek.

Všechny dvojice si nejprve postavily základní tvary podle učebnice, některé pokračovaly v tvorbě dalších tvarů i nadále. Počet dřívek většinou počítaly vždy znovu, ale postupně si některé dvojice uvědomily posloupnost v dolním řádku, kdy se každé sousední číslo zvětšovalo o dvě, resp. o tři dřívka. Některé dvojice také již dál neměly potřebu manipulovat a veškeré výpočty prováděly pamětně.

Při společném vyhodnocení práce na tabuli, kde byly připraveny obdobné tabulky z pracovního sešitu, došlo k zajímavému zjištění u Antonie (Příloha 14). Při práci udělala se svojí kamarádkou numerickou chybu, nicméně odhalila ji a přidala zjištění, jak bude narůstat počet dřívek: „Když je to trojúhelník, tak se přidává dvojka, když čtverec, tak trojka. A kdyby měl ještě nějaká další zvířata, tak by to byla čtyřka nebo pětka a tak.“

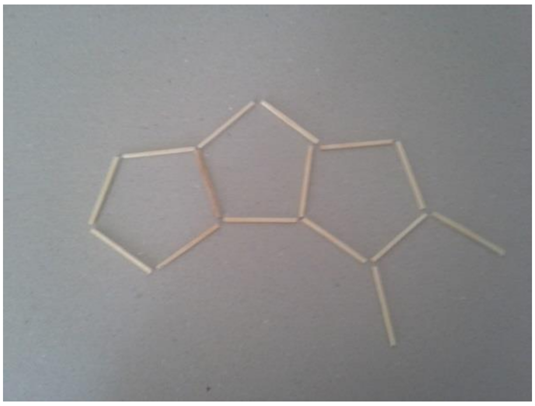
Domnívám se, že Antonii stačilo několik izolovaných modelů a objevila závislost mezi dvěma sousedními sloupci tabulky, kterou formulovala slovy: „přidává se dvojka a my ji tady u jedenáctky přidaly dvakrát“. Tím vlastně přispěla do schématu aritmetické posloupnosti v tabulce.

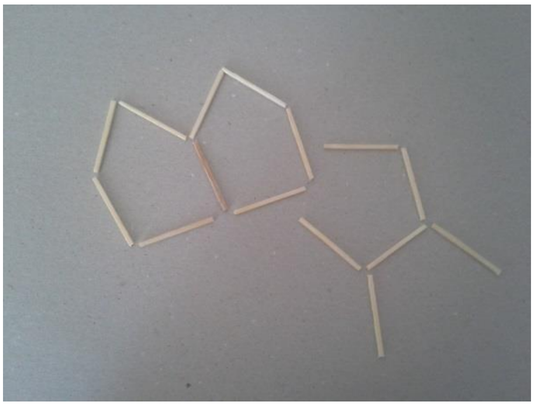
4.4.2 Další aritmetické posloupnosti

Výše popsaná situace mě vedla k připravení navazujícího experimentu. Rozhodla jsem se ověřit, zda uvedené zjištění ohledně aritmetické posloupnosti využijí děti i při dalších úlohách z prostředí dřívek, ale bez kontextu farmáře. Při vlastní práci v hodině někteří zcela přirozeně zaměňovali zadání z učebnice (okna) a motivační situaci z hodiny (výběhy pro zvířata).

Navazující experiment se uskutečnil 11. října 2012, kdy žáci pracovali opět ve dvojicích. Dvojice byly vytvořeny dle vlastní domluvy, každý si tedy mohl zvolit, s kým bude pracovat. Většinou se jednalo o stejné dvojice, jako v původní hodině.

Před vlastní prací jsem žáky seznámila s tím, že budeme opět hledat počet dřívek podle tvaru a počtu oken. Nejprve jsem připomněla, že jsme nedávno zjišťovali, kolik dřívek je potřeba k vytvoření určitého počtu oken trojúhelníkového a čtvercového tvaru. Oba obrázky z úlohy D_04 jsem nakreslila na tabuli. Nepřipomínala jsem ale, jaké zjištění jsme slyšeli od Antonie a od Květy (Příloha 14).





Obrázek 28: Ilustrace žákovské tvorby pětiúhelníků

Stanovila jsem si pět dílčích hypotéz, které jsem se rozhodla ověřit při vlastní práci dětí:

- Děti budou stavět všechny tvary, vždy vytvoří alespoň tři rovinné objekty dle zadání.
- V pracovním listu všechny dvojice vyplní bezchybně prvních šest sloupců.

- Pro vyplnění prvních šesti sloupců budou používat pravidelnost aritmetické posloupnosti.
- V sedmém sloupci, kde je „skok“ v aritmetické posloupnosti, udělají chybu, vyplní jej jako sedmé číslo v pořadí.
- Sedmiúhelník (nebo obrázek ze sedmi dřívek) vyplní a znázorní jen několik dvojic, především aktivní účastníci diskuze.

První hypotéza se nepotvrdila. Většina dětí sice tvořila tvary na lavici, ale většinou jim stačil jen první obrazec, jen výjimečně bylo potřeba vytvořit tři a více. To platilo nejen u známých tvarů, ale i u šestiúhelníků a sedmiúhelníků. I při znázornění v pracovním listě se úspěšní řešitelé spokojili s načrtnutím jednoho mnohoúhelníku, tři dvojice naznačily napojování dalších útvarů.

Ani předpoklad, že v pracovním listu všechny dvojice vyplní bezchybně prvních šest sloupců, se zcela nepotvrdil (Tabulka 6). Až na jednu dvojici byli úspěšní všichni žáci při řešení trojúhelníkových oken, ale některé další úlohy neřešili vůbec. Při dotazování na důvody je nejčastěji odradila příliš velká přirozená čísla. Pravidelnost do šestého sloupce někteří využili, ale ani to nebylo pravidlem. Spolehlivě mohu prokázat pouze její využití u žáků Patrika se Štěpánem a Antonie s Nikolou, čili ti žáci, které se aktivně zapojovaly do diskuze v předchozí hodině. U ostatních převažovalo postupně dopočítávání dřívek na základním obrazci.

V sedmém sloupci, kde je „skok“ v aritmetické posloupnosti, udělají chybu, vyplní jej jako sedmé číslo v pořadí. Toto se projevilo téměř u všech, ale většinou došlo později k opravě, čili svoji chybu si žáci uvědomili ještě před odevzdáním práce na konci hodiny. V každé práci je patrné přepisování a upravování tohoto výsledku. Ty práce, které jsem označila jako částečně vyplněné v jednotlivých řádcích, mají právě chybu u hodnoty pro deset oken a mnohdy i další sloupce následující.

Spolehlivě se mi potvrdila poslední hypotéza, kdy jsem předpokládala, že obrázek sedmiúhelníku (nebo útvaru složeného ze sedmi dřívek) znázorní pouze některé dvojice, především účastníci diskuze. Skutečně tomu tak bylo. Chlapecká dvojice (Patrik a Štěpán) vytvořily „domeček se splácnutou střechou“, dívčí dvojice (Antonie, Nikola) vytvořila „domeček se dvěma podlažími“, nikdo další se odpovídající obrazec nepokusil znázornit.

	trojúhelník	čtverec	pětiúhelník	šestiúhelník	sedmiúhelník	obrázky
Patrik, Štěpán	úplné	úplné	úplné	úplné	úplné	úplné
Antonie, Nikola	úplné	úplné	úplné	úplné	úplné	úplné
Květa, Valerie	úplné	úplné	částečné	úplné	úplné	částečné
Vít, Martina	úplné	úplné	úplné	úplné	částečné	částečné
Karel, Viktor	částečné	úplné	částečné	úplné	částečné	nevyplněno
Vasil, Jaroslav	úplné	úplné	úplné	nevyplněno	úplné	částečné
Tatiana, Adéla	úplné	úplné	nevyplněno	nevyplněno	částečné	částečné
Martin, Jolana	úplné	úplné	částečné	částečné	nevyplněno	částečné
Jan, Teodor	úplné	částečné	částečné	nevyplněno	nevyplněno	částečné
Helena, Andrea	úplné	částečné	částečné	částečné	nevyplněno	částečné

Tabulka 6: Řešení pracovního listu z prostředí Dřívka

4.4.3 Vyhodnocení a shrnutí případové studie č. 3: Dřívková geometrie

Při práci s dětmi jsem si uvědomila, jak silně se jednotlivé oblasti matematiky prolínají. Není možné přísně oddělit geometrické a aritmetické učivo. Dokonce není ani možné předem určit, které učivo bude v dané hodině dominantní. Jsem přesvědčena, že přestože jednotliví žáci neprokázali převzetí hotového poznatku od spolužačky, v jejich mysli se vytvořil minimálně zárodek schématu aritmetické posloupnosti

4.5 Případová studie č. 4: Parkety – pokrývání plochy

Poslední případová studie se týká pokrývání podlahy parketami a objevu nepřímé shodnosti u rovinných objektů. Ve třídě už byla několikrát řešena otázka, zda jsou objekty stejné nebo různé. Až do dále popsaného příběhu byl závěr vždy takový, že nepřímo shodné útvary (ať už ve 2D nebo 3D geometrii) bude lepší považovat za různé. Objevily se některé náznaky argumentů, že se jedná o stejné objekty, ale nikdy jsme nedošli k všeobecné shodě.

Uvedená případová studie mapuje časový interval, který byl zahájen v září 2012 (3. třída) a který prozatím uzavírám v říjnu 2012 (3. třída).

4.5.1 Pokrývání obdélníkové plochy pomocí polymin

V září 2012 byl při běžné výuce (Příloha 05: Podrobný scénář hodiny Parkety) pozorován zajímavý jev u žáka Víta.

Jako motivační příběh spojující všechny aktivity hodiny byla využita fiktivní situace, kdy se do nového činžovního domu stěhují tři nové rodiny – Adamovi, Bémovi a Cibulkovi. Tohoto motivačního příběhu bylo využito ve všech částech hodiny, tedy i v části věnované prostředí Parkety (Příloha 05).

Každá z těchto rodin se stěhuje do bytu, který má všechny místnosti stejně velké (3 x 4 dílky) a aby je odlišili, chtějí každou místnost mít jinak vyparketovanou. Adamovi mají pro každou místnost k dispozici parkety DUO, RŮŽEK, ÍČKO, ELKO (obr. 14), u Bémů používají v každé místnosti MONO, ÍČKO, ELKO A ČTYŘKU a Cibulkovi chtějí mít v každé místnosti vždy přesně tři parkety (nemusí být nutně různé). Úkolem je zjistit, kolik mohou mít v jednotlivých bytech pokojů se zadanými podmínkami. U Adamů existuje celkem 9 různých řešení (2+4+2+1), u Bémů 5 různých řešení (3+2) a u Cibulků jen 2 různá řešení (1+1). Čísla v závorkách udávají počet variant v závislosti na umístění největší parkety.[8]

Při vyhodnocování práce ve dvojicích, kdy jednotlivé dvojice dostaly za úkol zjistit, kolik místností mají jednotlivé rodiny ve svém bytě, jsem očekávala, že se nám podaří zjistit počet všech řešení pokrytí jednotlivých podlah podle daných parametrů. Na tabuli bylo připraveno několik prázdných podlah daného rozměru a děti postupně zakreslovaly nalezená řešení. U všech skupin se objevila i jedna dvojice nepřímo shodných pokrytí podlah. Některým žákům se nezdálo, že se jedná o různá řešení, ale nedokázali přesvědčivě argumentovat.

[8] Ve variantě A (Adamovi) je možné umístit parketu ELKO čtyř různých pozic, ve variantě B (Bémovi) parketu TYŘKA do dvou různých pozic a ve variantě C (Cibulkovi) leží parketa ČTYŘKA ve dvou různých pozicích dané podlahy.

K demonstraci sporných pokrytí jsme používaly parkety z tvrdého papíru (i barevně odlišené typy jednotlivých parket). Po fyzickém znázornění pokrytí obou navržených podlah se mnozí již přikláněli k názoru, že by se mohlo jednat o shodné podlahy. Zkoušeli s jednou nebo s druhou podlahou různě otáčet po podložce, ale k jejich překvapení a trochu i nevoli se stále nedařilo přemístit obě podlahy do stejné pozice. Po chvíli si Vít lehl na zem pod (neprůsvitnou) lavici a prohlásil: „Na jednu podlahu se musíme podívat zdola a na druhou shora a pak je to úplně stejné." Žáci na to spontánně reagovali tím, že si také lehaly na zem, ale pochopitelně nic neviděly. Vít došel ke svému objevu jen na základě své představivosti.

Tím objevem byl návod: Jestliže podlahy vypadají stejně, ale nejde je natočit tak, aby vypadaly úplně stejně, pak se na jednu podlahu podívej zdola a znovu porovnej." Věřím, že Vít dosáhl úroveň generického modelu budoucího poznání strategie, jak ověřit, zda dva obrazce jsou nepřímo shodné.

V průběhu živé diskuze zazněla i možnost, že stačí jednu podlahu překlopit na druhou, jako když se vyklápí bábovka z formy. Realizovat to však nebylo možné, protože parkety nebyly na podlahu přilepené a hned by se rozsypaly. Bohužel pro technické problémy videozáznam tohoto fragmentu výuky nemám. Základní dva poznatky jsem si však zapsala po hodině k přípravě. Od této příhody se vždy našel někdo, kdo prověřil i možnost překlopení, tedy nepřímé shodnosti.

Vít měl ze svého objevu očividnou radost a při závěrečné reflexi s celou třídou na téma, co se v hodině nejvíce líbilo, řekl: „Mně se nejvíce líbilo, jak jsme se hádali."

4.5.2 Využití nepřímo shodných obrazců při dalším řešení

Poznatku o nepřímo shodných rovinných útvarech, který zazněl od Víta ve třídě, jsem chtěla využít hned koncem měsíce září 2012, kdy jsem zadala dětem gradovanou sérii úloh (Příloha 09: Pracovní list Parkety).

Čtvercovou podlahu bylo potřeba pokrýt právě jednou parketou MONO a pak pouze parketami ÍČKO (obr. 14). Na pracovní list jsem připravila čtyři varianty této úlohy se zvyšující se obtížností. První, nejjednodušší čtvercová podlaha měla stranu dlouhou 4 dílky, další byla dlouhá 5 dílků, pak 7 dílků a poslední 8 dílků. První dvě varianty mají vždy jen jednu možnost, kam je možné umístit parketu MONO (4 x 4 do vrcholu čtverce, 5 x 5 do středu čtverce). Ve čtverci 7 x 7 existují tři možnosti, kam umístit parketu MONO, ale další řešení je možné nalézt různou kombinací položení parket ÍČKO. Ve čtverci 8 x 8 je jen jedna možná poloha parkety MONO, ale opět je několik řešení položení ostatních parket. Pro vyřešení varianty c) a d) je možné použít substituci (rozdělení na čtverec 4 x 4, resp. 5 x 5 a doplnění dalších obdélníků).

Očekávala jsem, že děti objeví jednak polohu parkety MONO, jednak že objeví, že je pouze jedno (resp. tři různá) řešení jejího umístění. Dále že naleznou alespoň dvě možnosti neshodného pokrytí u varianty c) a d).

Bohužel jsem zjistila, že gradovaná série úloh byla příliš obtížná pro všechny žáky. Někteří si nevěděli rady dokonce ani s nejjednodušším zadáním, ale většina své řešení vzdala hned u čtvercové podlahy velikosti 5 x 5. Hrubě jsem neodhadla, do jaké míry se Vítův objev rozšířil po třídě, předpokládala jsem, že aspoň někdo převzal od Víta jeho objev. Zadala jsem tedy úlohu, která je v učebnici zadána až ve třetím ročníku (P_05).

Při bližším porovnání obou zadaných úloh (P_02 a P_05 modifikováno) jsem dospěla k závěru, že se jedná o typově odlišné úlohy. Zatímco v případě úlohy P_02 je možné nalézt celou řadu možností, jak pokrýt zadanou podlahu a poté uvažovat nad shodností (přímou či nepřímou), u úlohy P_05 to možné není. Problémem je tu již situace, jak pokrýt podlahu a splnit stanovené podmínky. Pokud se nedaří toto zadání splnit náhodně, není možné očekávat od dětí ve třetím ročníku ověření, že další neshodné možnosti neexistují.

4.6 Tematický celek Obvod a obsah u sledované žákovské skupiny

V průběhu sledovaného období procházeli všichni sledovaní žáci výukou orientovanou na budování schémat (VOOBS) i v oblasti míry ve 2D (3.5.1). Při výuce řešili všechny typy uvedených úloh, kdy jim zcela v duchu VOBS nebyly prozrazovány optimální postupy řešení. Žáci objevovali nejvhodnější strategie řešení pro jednotlivé typy úloh, vzájemně se obohacovali při vysvětlování svých postupů a korigovali případné chyby při řešení.

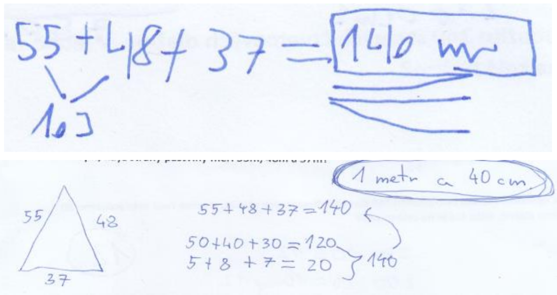
Při práci na projektu GA ČR byla vytvořena sada úloh (viz 3.5.2) pro ověření, zda žáci pociťují oblast míry ve 2D jako kritické místo stejně, jako tomu bylo u učitelů. Pro projekt bylo podstatné, že budou žáci jednotlivé úlohy vypracovávat pod vedením tazatele, který tak bude mít možnost pokládat doplňující otázky k vlastnímu řešení, případně bude moci dopomáhat řešiteli k úspěšnému vyřešení či bude žádat objasnění některých pracovních postupů při řešení daného problému.

Já jsem se rozhodla využít této možnosti a vyzkoušet výše uvedenou sadu úloh (Příloha 10), ale zadal jsem ji žákům ve své třídě jiným způsobem. Nevedla jsem se svými žáky individuální rozhovory, ale všechny uvedené úlohy jsem zadala jako test, kdy žáci pracovali samostatně během řádné vyučovací hodiny. Na práci měli 40 minut čistého času a testu se zúčastnilo 20 žáků. Test byl zadán ke konci 4. ročníku (30. 5. 2014), jako součást klasifikačních testů.

4.6.1 Vyhodnocení jednotlivých úloh z hlediska úspěšnosti

V textu uvedu znovu zadání jednotlivých úloh podle absolutní úspěšnosti. U každé úlohy poukážu na strategie řešení i předpokládané možnosti chybného, neúplného nebo vynechaného řešení. U každé úlohy uvádím jednu ilustraci správného a jednu ilustraci chybného řešení (kromě úloh OBS_11 a OBS_16, kde chybná řešení nebyla, zde uvádím dvě správná řešení za použití různé strategie).

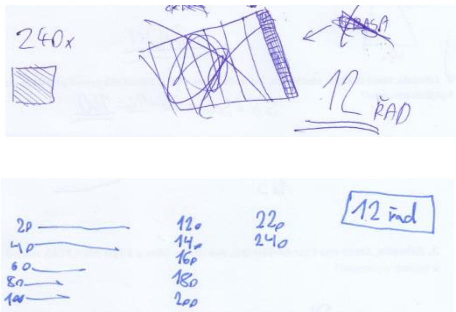
OBS_11: Pastvina, která má tvar trojúhelníka, má být obehnána drátem. Kolik metrů drátu je potřeba nakoupit, když strany pastviny měří 55 m, 48 m a 37 m?



Obrázek 29: Ukázka dvou různých strategií řešení úlohy OBS_11

Jedna ze dvou nejúspěšněji vyřešených úloh (19 správných řešení). Domnívám se, že tak vysoká úspěšnost byla dána tím, že si žáci skutečně představili pastvinu daných rozměrů a v pěti případech si ji také načrtli. Jako nejčastější strategie bylo použito součtu všech tří rozměrů, ve čtyřech případech se jednalo o postupný součet dvou rozměrů a teprve pak byl přidáván třetí rozměr trojúhelníku. Jedna neúspěšná žákyně se do řešení vůbec nepustila. Žádné řešení nevykazovalo známky obecného záznamu vzorce, neboť se s ním v algebraické podobě ještě nikdy ve výuce nesetkali. Různé strategie řešení bylo možné vidět pouze při užití algoritmu součtu tří čísel. Z písemného záznamu je možné vyčíst jak sčítání pod sebe (tradiční písemný algoritmus), tak sčítání nejprve desítek, potom jednotek, ale také kombinace různých čísel v různém pořadí. Ve všech řešeních byly uvedeny i správné jednotky délky.

OBS_16: K vydláždění terasy bylo použito 240 stejných čtvercových dlaždic. V jedné řadě bylo položeno 20 těchto dlaždic. Kolik řad je na celé terase?

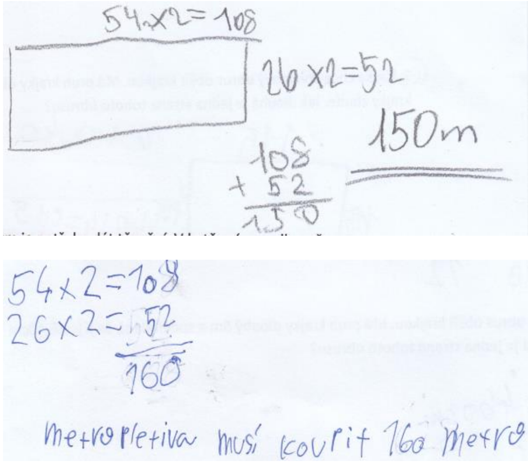


Obrázek 30: Ukázka dvou různých strategií řešení úlohy OBS_16

Stejný počet úspěšných řešení (19 správných řešení) vykázala i inverzní úloha, tedy určení délky strany obdélníku, známe-li jeho obsah. Tuto úlohu neřešil jiný žák, také se o řešení úlohy vůbec nepokusil. U všech ostatních bylo řešení jak numericky správné, tak bylo uvedeno, že se jedná o 12 řad. Velmi zajímavé pro mě bylo zjištění, jakým způsobem došlo u všech dětí k vyřešení úlohy 240 : 20. Přesto, že jsme se v průběhu výuky seznámili s mnoha způsoby dělení dvojciferným číslem, včetně tzv. tradičního postupu, nikdo z dětí se o něj nepokusil. V podstatě je možné vysledovat dva přibližně stejně početně zastoupené způsoby vlastního dělení. Jeden způsob je vlastně rozkladem čísla 240 na takové hodnoty, které žák dokáže vydělit zpaměti (např. 200 + 40, 120 + 120, 100 + 100 + 40), druhý způsob je určením aritmetické posloupnosti (20, 40, 60, …240, kde $a_1 = 20$, $a_n = 240$), kde je potřeba určit pořadí členu s hodnotou 240.

OBS_12: Zahrada, která má tvar obdélníku, má délku 54 m a šířku 26 m.Kolik metrů pletiva je potřeba k jejímu oplocení?

Další nadprůměrně úspěšná úloha (16 správných řešení) se týkala zahrady tvaru obdélníka se zadanými rozměry. Zde již bylo možné vypozorovat několik různých strategií řešení. Nejčastěji byla použita možnost vynásobit každý rozměr dvakrát a výsledky sečíst. Druhou nejčastěji používanou strategií bylo nejprve sečíst oba zadané rozměry a teprve pak výsledek vynásobit dvěma. Jedna žákyně provedla kombinaci obou postupů, kdy délku vynásobila dvěma, ale šířku dvakrát přičetla. Tři ze čtyř neúspěšných žáků použili postup vedoucí k cíli, ale provedli numerickou chybu v součtu nebo v součinu. Jeden neúspěšný žák pouze sečetl délku a šířku, ale již nevynásobil dvěma.

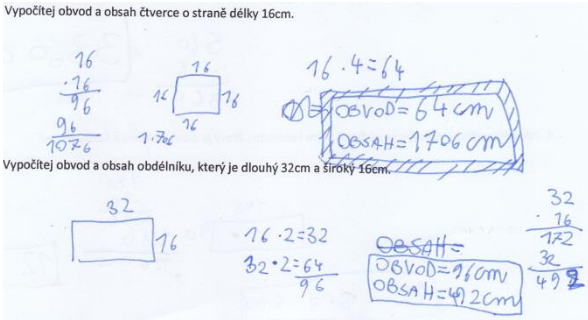


Obrázek 31: Ukázka chybného (nahoře) a správného řešení úlohy OBS_12

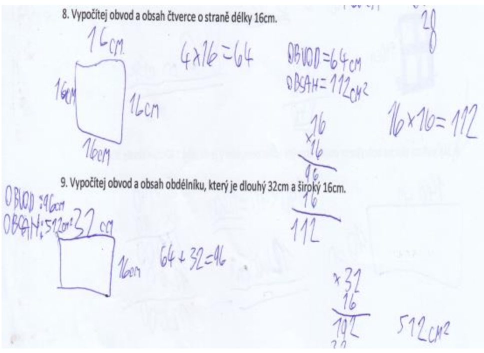
OBS_18: Vypočítej obvod a obsah čtverce o straně délky 16 cm.

OBS_19: Vypočítej obvod a obsah obdélníku, který je dlouhý 32 cm a široký 16 cm.

Velmi překvapivý a pro mě neočekávaný výsledek měly poslední dvě úlohy. Očekávala jsem, že tyto dvě úlohy budou nejméně úspěšné, protože s takovýmto zadáním se žáci v podstatě nikdy nesetkali. Slova obvod i obsah užíváme vždy, když je to smysluplné označení, ale nikdy takto bez kontextu nebo bez obrázku. Přesto 15 žáků správně určilo obvod čtverce a 13 obvod obdélníku. Bohužel obsah čtverce i obsah obdélníku správně určilo jen 7 žáků. Všichni ale zaznamenali, že pro výpočet obsahu je potřeba násobit, ale v písemném i pamětném algoritmu násobení velice chybovali.



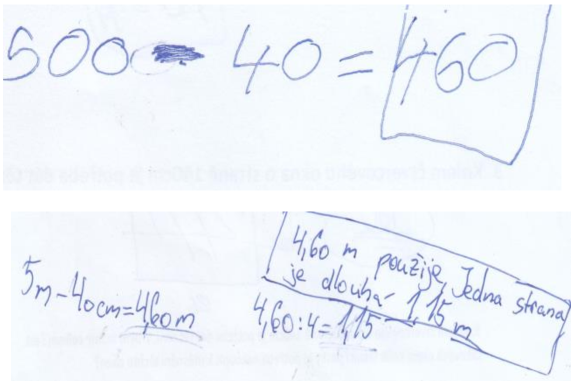
Obrázek 32: Ukázka správného výpočtu obvodu, ale numerické chyby u výpočtu obsahu úloh OBS_18 a OBS_19



Obrázek 33: Ukázka zcela správného řešení úloh OBS_18 a OBS_19

OBS_17: Katka chce čtvercový ubrus obšít krajkou. Má pruh krajky dlouhý 5 m a spočítala si, že jí ještě 40 cm krajky zbude. Jak dlouhá je jedna strana tohoto ubrusu?

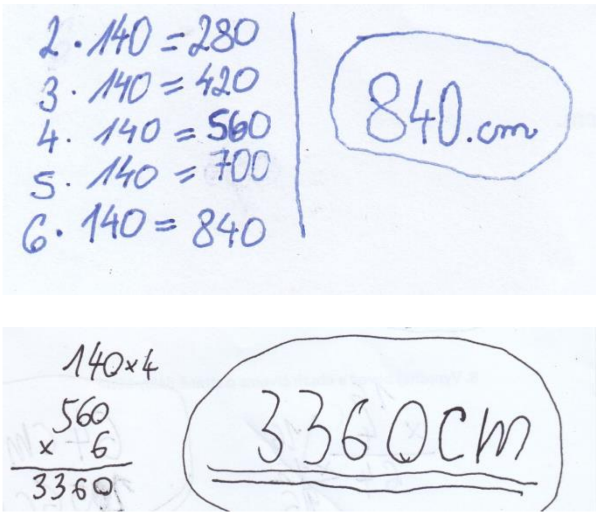
Více než padesátiprocentní úspěšnost (12 správných řešení) této úlohy svědčí především o tom, že si žáci dokázali představit, o co v úloze jde. Někteří si také nakreslili obrázek ubrusu, když před tím určili délku použité krajky. Bez problémů tedy správně převedli různé délkové jednotky. Rozdíly v použitých postupech se týkaly pouze algoritmu dělení. Většinou rozdělili 4 metry a zbylých 60 cm nejprve rozdělili na poloviny a pak znovu na poloviny. Ke správnému číselnému výsledku nedospěli čtyři žáci (z důvodu numerické chyby), další čtyři žáci úlohu neřešili.



Obrázek 34: Ukázka neúplného (nahoře) a správného řešení úlohy OBS_17

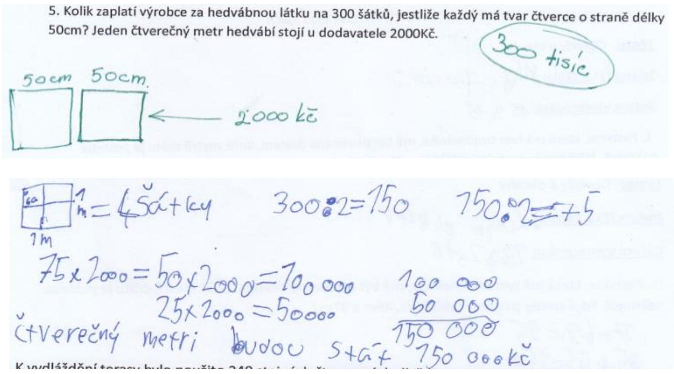
OBS_13: Kolem čtvercového okna o straně 140 cm je potřeba dát těsnění. V bytě máme celkem šest takových oken. Kolik těsnící pásky je potřeba nakoupit k utěsnění těchto oken?

Výsledky této úlohy (11 úspěšných řešení) neodpovídaly mému očekávání. Obecně jsem očekávala, že úlohy z první skupiny (OBS_11, OBS_12, OBS_13 a OBS_14) budou pro žáky velmi jednoduché, že zde bude hodně velká úspěšnost. V případě této úlohy byl problém v násobení trojciferného čísla, které většinou žáci počítali rozkladem. Druhým problémem bylo, že zde bylo potřeba provést početní operaci násobení dvakrát, což pět z devíti neúspěšných žáků neprovedlo.



Obrázek 35: Ukázka chybného (nahoře) postupu a správného řešení úlohy OBS_13

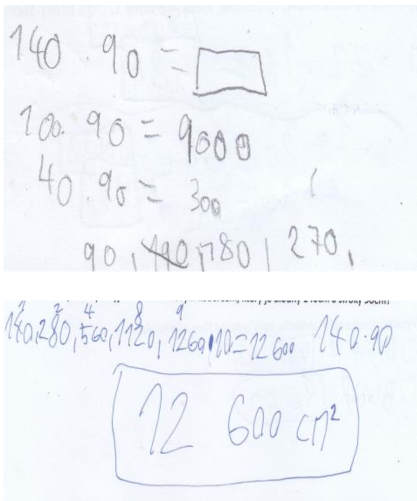
OBS_15: Kolik zaplatí výrobce za hedvábnou látku na 300 šátků, jestliže každý má tvar čtverce o straně délky 50 cm? Jeden čtverečný metr hedvábí stojí u dodavatele 2000 Kč.



Obrázek 36: Ukázka chybného (nahoře) a správného řešení úlohy OBS_15

Očekávala jsem, že tato úloha bude nejméně úspěšná, což se nevyplnilo (6 úspěšných řešení). Tato velmi náročná úloha byla vyřešena šesti žáky, z nichž každý použil svůj specifický způsob řešení. Mnozí další žáci úlohu také začali řešit, ale často provedli jen část řešení, např. výpočet ceny za jeden šátek. Častou chybou také bylo určení ceny za dva šátky (1 000 Kč), přičemž s touto sumou poté pracovali jako s cenou za jeden šátek. Odhaduji, že se jedná o nepřesné pochopení pojmu čtverečný metr.

OBS_14: Jak velkou plochu pokryjeme obdélníkovým kobercem, který je dlouhý 140 cm a široký 90 cm?



Obrázek 37: Ukázka neúplného (nahoře) a správného řešení úlohy OBS_14

Tato nejméně úspěšná úloha (4 správná řešení) byla pro mě opravdu velkým překvapením. Očekávala jsem, že v úlohách z první skupiny (OBS_11, OBS_12, OBS_13 a OBS_14) bude alespoň padesátiprocentní úspěšnost, což se nestalo. Úspěšní žáci většinou bez nutnosti kreslit obrázek koberce správným vynásobením určili plochu, kterou pokryjeme kobercem. Mezi důvody neúspěchu dle mého názoru patří skutečnost, že žáci nerozuměli slovu plocha, přestože toto slovo ve výuce používám. Často totiž určili obvod koberce, nikoliv jeho obsah. Druhým důvodem je to, že při součinu bylo potřeba vynásobit dvojciferné a trojciferné číslo, kde došlo překvapivě k velkému množství chybných výpočtů. Častou chybou bylo také nesprávné určení jednotky, kdy buď tuto jednotku vůbec nepoužili, nebo neurčili, že se jedná o čtverečné jednotky.

Z pohledu jednotlivých žáků se test jevil jako velice úspěšný (Tabulka 7), kdy jeden žák vyřešil všechny úlohy naprosto bezchybně, další dva žáci správně vyřešili 9 úloh (obvod a obsah u posledních dvou úloh jsem počítala samostatně) a celkově 14 žáků vyřešilo správně pět a více úloh. U nikoho nebyl odevzdán prázdný test, což svědčí o tom, že se všichni o nějaká řešení v rámci svých možností pokusili.

Jméno	OBS_11	OBS_12	OBS_13	OBS_14	OBS_15	OBS_16	OBS_17	OBS_18 (obvod)	OBS_18 (obsah)	OBS_19 (obvod)	OBS_19 (obsah)	celkem
Štěpán	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	11
Karel	A	A	-	A	A	A	A	A	-	A	A	9
Patrik	A	A	A	-	A	A	A	A	A	A	-	9
Antonie	A	-	A	-	-	A	A	A	A	A	A	8
Augusta	A	A	A	-	-	A	A	A	A	A	-	8
Adéla	A	A	A	-	-	A	A	A	A	A	-	8
Jaroslav	A	A	-	-	A	A	A	A	-	A	A	8
Vít	A	A	A	A	-	A	A	A	-	A	-	8
Helena	A	A	-	-	-	A	-	A	A	A	A	7
Jonáš	A	-	A	A	-	A	A	A	-	A	-	7
Květa	A	A	A	-	-	A	-	A	-	A	A	7
Tatiana	A	A	A	-	-	A	-	A	A	A	-	7
Teodor	A	A	A	-	A	A	A	-	-	-	A	7
Vasil	A	A	A	-	A	A	A	A	-	-	-	7
Martin	A	A	-	-	-	A	-	A	-	A	-	5
Nikola	A	A	-	-	-	A	A	-	-	-	-	4
Valerie	A	A	-	-	-	A	-	A	-	-	-	4
Martina	A	A	-	-	-	A	-	-	-	-	-	3
Andrea	-	-	-	-	-	A	-	-	-	-	-	1
Viktor	A	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1
Celkem	19	16	11	4	6	19	12	15	7	13	7	129

Tabulka 7: Vyhodnocení testu z tematického celku Obvod a obsah

5 Závěr

V závěrečné kapitole nejdříve shrnu, jak jsem splnila vytčené cíle a naplnila výzkumné otázky. V druhé části formuluji limity výsledků realizovaného výzkumu a omezení předloženého výzkumu a uvedu otázky pro další výzkum.

5.1 Odpovědi na stanovené výzkumné otázky

Ve všech uvedených případových studiích jsem identifikovala okamžiky, kdy dochází k poznání poměrně hluboké matematické myšlenky.

V případové studii Krychlové stavby (kapitola 4.2) jsem popsala jev šíření poznatků mezi žáky ve třídě - objev jednoho žáka a jeho sdělení ostatním přispělo k rozšíření daného poznatku, tedy jak je možné prokázat, že byla nalezena všechna řešení vyhovující podmínkám zadané úlohy. K poznání nové strategie přispěla nutnost přesvědčit své spolužáky o úplnosti řešení.

V případové studii Origami (kapitola 4.3) jsem ukázala, jak manipulativní neobratnost jednoho žáka byla příčinou náhodného objevu shodných lichoběžníků u jiného žáka. K poznání nového geometrického objektu přispěla snaha o podporu „chybujícího" spolužáka. V diskuzi byl pak objeven pro žáky nový tvar, a sice pravoúhlý lichoběžník.

V případové studii Dřívka (kapitola 4.4) je zachyceno, jak došlo k objevu aritmetické posloupnosti při opravování vlastní chyby jednou žákyní. Tato žákyně byla spolužáky donucena vysvětlit své chybné řešení, čímž je zároveň seznámila se vztahy, které využívala se svojí spolužačkou při řešení úlohy.

V případové studii Parkety (kapitola 4.5) došlo k po mnoha diskuzích ve skupině žáků k poznání nepřímo shodných útvarů a k nalezení „návodu", jak je možné nepřímou shodnost realizovat při manipulacích jinak než překlápěním.

Ze všech uvedených případových studií je patrné, že k poznání nějakého geometrického objektu, jevu, vztahu či nové situace nejvíce přispěla možnost komunikace mezi dětmi, ať to byla komunikace na úrovni žák-žák, na úrovni žák-skupina či žák-třída. Komunikace na úrovni žák-učitel se v mé práci i v ostatních, v práci nezpracovaných materiálech, jeví jako nejméně příznivá pro nové žákovské poznávání. To ukazuji v případové studii Krychlové stavby (kapitola 4.2.1).

Jaká geometrická schémata si žáci při svém poznávání vytvářejí?

Při pozorování svých žáků jsem si uvědomovala, jak možnost komunikace a posilování žákovského sebevědomí vede k vytváření nejen geometrických, ale i aritmetických či dokonce algebraických schémat v jejich mysli, že tedy nelze oddělit výuku geometrie od aritmetiky a dalších oblastí matematiky, jako kombinatoriky a práce s daty.

V uvedených případových studiích jsem analýzou identifikovala tato geometrická i negeometrická schémata:

Metrické vlastnosti krychlových staveb a vazby mezi nimi (různé krychlové stavby mají různou výšku, ale stejný objem).

Soubor všech staveb s jistou vazbou (strategie nalezení všech řešení postupným proměňováním stavby).

Dělení čtverce na dva shodné objekty (nekonečně mnoho způsobů).

Vztah celek a část (stejné části celků mají stejný obsah, obě poloviny stejného čtverce i všechny čtvrtiny stejného čtverce mají stejný obsah, bez ohledu na tvar (obdélník, trojúhelník, lichoběžník, …).

Vztah mezi pravidelností tvarů a číselnou řadou, která je aritmetickou posloupností (každá dvojice sousedních členů se liší o konstantní hodnotu) a jeho aplikace ve výpočtech.

Obvod mnohoúhelníku (je dán součtem délek všech jeho stran) a jeho výpočet

Obsah obdélníku a čtverce (je dán součinem délek jeho sousedních stran).

Předpokládám, že to nejsou jediná schémata, která si žáci při svém poznávání vytvořili. Jsou to však ta, která jsem byla schopna identifikovat při vlastní výzkumné práci.

Jaký geometrický jazyk při komunikaci o geometrických jevech žáci používají? Jak jazyk v komunikaci o objektech odráží jejich myšlení a porozumění objektům?

Děti spolu komunikují jazykem, který je jim nejbližší, tedy mateřským, často hovorovým jazykem. Při vlastní komunikaci používají jak metaforický jazyk, tak formálně správný geometrický jazyk.

Při poznávání nových objektů žáci používají nejčastěji metaforický jazyk. U tvorby jednotlivých krychlových staveb často používají názvy předmětů, které jim daná stavba nejvíce připomíná. Do volby metaforického jazyka se promítají dosavadní zkušenosti žáků.

Jednu stavbu jeden žák nazve panelákem, druhý věží. Když učitel používá správnou geometrickou terminologii při svých komentářích doprovázejících činnosti s novými objekty, žáci se tak s novou terminologií seznamují nenásilně a v rychlosti, která koresponduje s rozvojem jejich porozumění, a tyto pojmy přejímají do svého komunikačního registru. Tak například nejprve žáci používali slova špička pro vrchol, vršek pro horní vodorovnou stěnu, zeď pro stěnu kolmou k podložce atd., a postupně svůj poloodborný geometrický slovník zpřesňovali, jak si to jejich vzájemná komunikace vynucovala.

Podobně tomu bylo i při popisu rovinných útvarů v prostředí Origami nebo Dřívek. Často si žáci uvědomovali, že nějaký průvodní jev geometrického tělesa má své přesné geometrické pojmenování, kterému pasivně rozumí, ale ještě ho nemají uloženo ve své aktivní slovní zásobě. Při jeho užití učitelem se neptají na význam, už mu rozumí, ale při vlastní komunikaci opět použijí metaforický nebo dokonce hovorový jazyk.

5.2 Omezení výzkumu a jeho možné pokračování

Výzkum byl proveden s jednou třídou v průběhu jejich vzdělávání na prvním stupni. Často nebylo možné oddělit roli učitele a roli výzkumníka a někdy i pozorovatele (při vedení studentských praxí). To jsem si uvědomovala velmi výrazně při analýzách vlastních videonahrávek. Stávalo se mi, že některé moje aktivity bylo možné označit za ryze výukové, ale bohužel nepoužitelné pro zařazení do této práce, přestože si myslím, že při jiném způsobu vyřešení dané situace bych získala mnohem pestřejší materiál jako podklad pro odpovědi na výše položené výzkumné otázky.

Přestože v práci uvádím na mnoha místech statistické přehledy žákovských výsledků, nedovolila jsem si je použít jako podklad pro kvantitativní zpracování. Vzorek subjektů výzkumu není dostačující pro vyslovení jakýchkoliv statistických závěrů.

Věřím však, že se mi podařilo naplnit základní znaky případové studie (s. 28), neboť jsem popsala konkrétní situaci v závislosti na konkrétním matematickém/geometrickém tématu. Každá případová studie popisuje historii vývoje určitého úzce vymezeného pojmu/objektu/vlastnosti v poznávacím procesu. Důkladné prozkoumání a popsání jednoho konkrétního případu přináší užitek mně osobně pro moji další praxi, pomáhá mi také lépe porozumět mnoha situacím, které se odehrávají nejen při mé vlastní výuce i při pozorování výuky ostatních vyučujících (kolegů, ale i studentů na praxi).

Tuto skupinu žáků povedu i na druhém stupni. Svůj bohatý archív videonahrávek hodlám i nadále rozšiřovat a v dalších letech bych ráda provedla další analýzu v závislosti na učivu určeného pro druhý stupeň. Hodlám tedy pokračovat ve sledování celé třídy i jednotlivých žáků s ohledem na uvedené případové studie.

Obecně se předpokládá velký význam komunikace mezi žáky ve výuce matematiky. Tato komunikace přispívá k rozvoji matematického myšlení, poznávání nových matematických poznatků, objevování nových objektů i schopnosti argumentace. Ve své práci jsem ukázala na několika případech, jak k tomu dochází. Domnívám se, že hlavní přínos mé práce spočívá v tom, že jsem tyto teze konkrétně naplnila a ukázala, jak k tomu dochází. Aby bylo možno mé závěry zobecnit, bylo by potřeba podstatně rozšířit repertoár případových studií. To by mohlo být tématem navazujících prací (disertačních i diplomových).

Použitá literatura

CRESWELL, J. W., *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five traditions.* Thousand Oaks: Sage Publications, 1998.

DEMETEROVÁ, Vlasta. *Hlavolamy. Sirkové – deskové - dominové.* Praha: Fragment. 2010. ISBN 80-253-0045-5.

DEWEY, J. *Demokracie a výchova*. Praha: Laichter, 1932.

EUKLEIDES. *Základy: Knihy I – IV Komentované Petrem Vopěnkou.* Nymburk: OPS, 2007. ISBN 80-903773-6-X

GERRIG, R. J. *Text comprehension*. In STERNBERG, R. J.; SMITH, E. E. (Eds), *The Psychology of Human Thought*. Cambridge: Cambrige University Press, 1991, s. 244-245

GLASERSFELD VON, E. *Radical constructivism.* London: The Falmer Press, 1995.

HARTL, P., HARTLOVÁ, H. *Psychologický slovník*. Praha: Portál, 2000.

HEJNÝ Milan a Graham LITTLER. Transmisivní a konstruktivistický přístup k vyučování. In STEHLÍKOVÁ, N. eds. *Náměty na podnětné vyučování v matematice.* Praha: Univerzita Karlova v Praze, pedagogická fakulta, 2007, s. 11-30. ISBN 978-80-7290-342-9.

HEJNÝ, M. Budování matematických schémat. In HOŠPESOVÁ, A., STEHLÍKOVÁ, N., TICHÁ, M. eds. *Cesty zdokonalování kultury vyučování matematice*. České Budějovice: Jihočeská Univerzita v Českých Budějovicích, 2007, s. 81 – 122.

HEJNÝ, Milan a František KUŘINA. Dítě, škola, matematika. Konstruktivistické přístupy k vyučování. Praha: Portál, 2001. ISBN 80-7178-581-4.

HEJNÝ, Milan a František KUŘINA. Dítě, škola, matematika. Konstruktivistické přístupy k vyučování. Praha: Portál, 2009. ISBN 978-80-7367-397-0.

HEJNÝ, Milan. *Budování geometrických proceptů.* In AUGSBERGOVÁ, M.; NOVOTNÁ, J. (Eds), *Sborník z konference 7. setkání učitelů matematiky všech stupňů a typů škol.* Mariánské Lázně: JČMF, 2000.

HEJNÝ, Milan. *Budování matematických schémat*. In HOŠPESOVÁ, Alena., STEHLÍKOVÁ, Naďa., TICHÁ, Marie. *Cesty zdokonalování kultury vyučování matematice*. České Budějovice: Jihočeská Univerzita v Českých Budějovicích, 2007, s. 81 – 122.

HEJNÝ, Milan. Mechanizmus poznávacího procesu. In HEJNÝ, M., J. NOVOTNÁ, N. STEHLÍKOVÁ, eds. Praha: Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta, *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. 2004. s. 23 – 42. ISBN 80-7290-189-3.

HEJNÝ, Milan. *Vyučování orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně.* Praha: UK v Praze, Pedagogická fakulta, 2014. ISBN 978-80-7290-776-2.

HENDL, Jan. *Kvalitativní výzkum.* Praha: Portál. 2005. ISBN 80-7367-040-2.

HERSHKOWITZ, Sara. *Intuition, schema, and problem solving*. In NOVOTNÁ, J., MORAOVÁ, H. *SEMT ´09 – International Symposium, Elementary Maths Teaching. Proceedings. Praha:* UK v Praze, PedF, 2009, s. 31 – 41

HILBERT, David. *Grundlagen der Geometrie.* 1899

CHRÁSKA, M.: Možnosti měření v pedagogice, (rkp.). Olomouc, PedF UP 1994

JANÍK, T. Didaktika obecná a oborová: Pokus o vymezení a systematizaci pojmů. In PRŮCHA, J. *Pedagogická encyklopedie.* Praha: Portál, 2009.

JAROLÍMEK, Vincenc. *Geometrie pro nižší třídy škol reálných.* Praha 1905

JIROTKOVÁ, Darina. *Cesty ke zkvalitňování výuky geometrie.* Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2010. ISBN 978-80-7290-399-3

KALHOUS, Zdeněk a Otto OBST. *Školní didaktika.* Praha: Portál, 2002. ISBN 80-7067-920-4.

KADUNZ, Gert a Rudolf STRÄSSER. *Didaktik der Geometrie in der Sekundarstufe I.* Berlin: Franzbecker, 2007. ISBN 978-3-88120-376-1

KLOBOUČKOVÁ, Jaroslava. *Rozbor učebnice Geometrie pro nižší třídy škol reálných z roku 1905.* Olomouc, 1999. Diplomová práce. UP Olomouc, Pedagogická fakulta.

KLOBOUČKOVÁ, Jaroslava. Cube building in primary school. In NOVOTNÁ Jarmila a Hana MORAOVÁ, eds. *The mathematical knowledge needed for teaching in elementary schools.* Prague: Charles University, Faculty of Education, 2011, s. 206 – 213. IBSN 978-80-7290-509-6.

KLOBOUČKOVÁ, Jaroslava a Darina JIROTKOVÁ. Inovace ve vyučování matematiky v primární škole a v profesní přípravě učitele matematiky primární školy. In UHLÍŘOVÁ Martina, eds. *Matematika 5: Specifika matematické edukace v prostředí primární školy.* Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2012, s. 342-346. ISBN 978-80-244-3048-5.

KLOBOUČKOVÁ, J. *Obvod a obsah rovinného obrazce v žákovských řešeních.* In LÁVIČKA, Miroslav a Bohumír BASTL, eds. *Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2008.* Plzeň: Vydavatelský servis, 2014, s. 177 – 182. ISBN 978-80-86843-21-6

KLOBOUČKOVÁ, J., JIROTKOVÁ, D. *Cognitive osmosis in class and young pupil's cognitive processes in Geometry.* In CME´12 Rzeszow, 2012.

KOLÁŘ, I. *Česká geometrie v uplynulých čtyřiceti letech a některé současné trendy diferenciální geometrie* In Vývoj matematiky v ČSR v období 1945 – 1985 a její perspektivy. Univerzita Karlova. Praha 1986.

KRAEMER, E. *Vývoj školské matematiky a didaktiky matematiky v ČSR v období 1945 – 1985.* In Vývoj matematiky v ČSR v období 1945 – 1985 a její perspektivy. Univerzita Karlova. Praha 1986.

KUBÍNOVÁ, Marie. *Projekty ve vyučování matematice, cesta k tvořivosti a samostatnosti.* Praha: PedF UK, 2002

KUŘINA, František. *Deset pohledů na geometrii*. Praha: MÚ AV ČR, 1996. ISBN 80-7196-231-7

LÁVIČKA, M., DOBRÝ, J. Možnosti využití počítače k podpoře výuky geometrie na technických fakultách. In LÁVIČKA, M., BASTL, B., AUSBERGEROVÁ, M. eds. *10. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol*. Plzeň, 2006, s. 189 – 194

MIKULČÁK, Jiří. *Nástin dějin vzdělávání v matematice (a také školy) v Českých zemích do roku 1918*. Praha: MATFYZPRESS: 2010. ISBN 978-80-7378

PIAGET, J. *The equilibrium of cognitive structures*. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1985.

PRŮCHA, J. *Moderní pedagogika*. Praha. Portál 1997

RENDL, Miroslav a Naďa VONDROVÁ a kol. *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů.* Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2013. ISBN 978-80-7290-723-6

STAKE, R. E. *The art of case study research.* London: Sage, 1995.

STEHLÍKOVÁ, Naďa. Analýza písemného řešení žák, jedna z možných technologií. In NOVOTNÁ, Jarmila. Analýza řešení slovních úloh. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2000, s. 98-117.

STEHLÍKOVÁ, Naďa. Konstruktivistické přístupy k vyučování matematice. In HEJNÝ, M., J. NOVOTNÁ, N. STEHLÍKOVÁ, eds. *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky.* Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2004. s. 11 – 23. ISBN 80-7290-189-3.

STEHLÍKOVÁ, N. Charakteristika kultury vyučování matematice z pohledu činnosti učitele. In HOŠPESOVÁ, A., STEHLÍKOVÁ, N., TICHÁ, M. *Cesty zdokonalování kultury vyučování matematice*. České Budějovice: Jihočeská Univerzita v Českých Budějovicích, 2007, s. 13 – 48.

STEHLÍKOVÁ, N., TICHÁ, M. *Didaktika matematiky a její proměny*. Pedagogická orientace (Journal of the Czech Pedagogical Society) 2011, roč. 21, s. 156-170.

SWOBODA, Ewa. Geometria dla najmlodszych – ale jaka (i po co)? In UHLÍŘOVÁ, M. *Matematika 5: Specifika matematické edukace v prostředí primární školy.* Sborník příspěvků. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2012, s. 285-291. ISBN 798-80-244-3048-5.

ŠVAŘÍČEK, Roman a Klára ŠEĎOVÁ. *Kvalitativní výzkum v pedagogických vědách*. Praha: Portál. 2007. ISBN 978-80-7367-313-0.

TICHÁ, Marie. Podnětná výuková prostředí pro přirozenou diferenciaci. In UHLÍŘOVÁ, M. *Matematika 4: Matematické vzdělávání v kontextu proměn primární školy.* Sborník příspěvků. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2010, s. 298-302. ISBN 798-80-244-2511-5.

VOPĚNKA, Petr. *Rozpravy s geometrií*. Praha: Vesmír, 1989

VOPĚNKA, Petr. *Úhelný kámen evropské vzdělanosti a moci*. Souborné vydání Rozprav s geometrií, Praha: Práh, 2000

VYŠÍN, Jan. *Soustava axiomů euklidovské geometrie*. SPN Praha, 1959

WITTMANN, Erik. *Developing mathematics education in a systemic process. Educational Studies in Mathematics Education,* vol. 48, no. 1, 2001, p. 1 – 20

YIN, R. K. *Case study research: design and methods.* Thousand Oaks: Sage Publications, 2003, s. 13 – 14.

Učebnice:

GULOVÁ, M., ŽILINKOVÁ, J. *Početnice pro druhý postupný ročník.* SPN Praha, 1956.

HAVLÍK, M., PINDROCH, Š., TESAŘ, K. *Početnice pro pátý ročník.* SPN Praha, 1968.

HEJNÝ M, D. JIROTKOVÁ, E. BOMEROVÁ, J. MICHNOVÁ. *Matematika pro 5. ročník základní školy.* Plzeň: Fraus, 2011. ISBN 978-80-7238-966-7.

HEJNÝ M, D. JIROTKOVÁ, E. BOMEROVÁ. *Matematika pro 4. ročník základní školy.* Plzeň: Fraus, 2010. ISBN 978-80-7238-940-7.

HEJNÝ M, D. JIROTKOVÁ, J SLEZÁKOVÁ, J. MICHNOVÁ. *Matematika pro 3. ročník základní školy.* Plzeň: Fraus, 2009. ISBN978-80-7238-824-0.

HEJNÝ M, D. JIROTKOVÁ, J SLEZÁKOVÁ. *Matematika pro 1. ročník základní školy, I., II. díl.* Plzeň: Fraus, 2007. ISBN 978-80-7238-626-0.

HEJNÝ M, D. JIROTKOVÁ, J SLEZÁKOVÁ. *Matematika pro 2. ročník základní školy, I., II. díl.* Plzeň: Fraus, 2008. ISBN 978-80-7238-768-7.

KADEŘÁBEK, S., ŽILINKOVÁ, J. *Početnice pro druhý ročník.* Praha: SPN, 1971.

KURFÜRST, J. *Početnice pro čtvrtý ročník*. Praha: SPN, 1961.

KURFÜRST, J., ČEJKA, J. *Početnice pro čtvrtý ročník.* Praha: SPN, 1966.

RAKUŠANOVÁ, A., PINDROCH, Š., TESAŘ, K., VYŠÍN, J. *Početnice pro pátý ročník. Praha: SPN, 1959.*

ZELINA, L., KOCIÁN, L. *Početnice pro třetí ročník*. Praha: SPN, 1958.

ZELINA, L., LEČKO, I., BROŽ, J. *Početnice pro třetí ročník.* Praha: SPN, 1961.

Internetové zdroje:

http://www.msmt.cz/vzdelavani/zakladni-vzdelavani/upraveny-ramcovy-vzdelavaci-program-pro-zakladni-vzdelavani

Přílohy

Příloha 01 Ukázka z pedagogického deníku

Škola: FZŠ Táborská, Praha 4 – Nusle

Třída: 1. B

Školní rok: 2010/2011

Datum výuky: 7. 9. 2010 (úterý)

Pořadové číslo hodiny: 3. hodina

Očekávání: Po přípravě na dnešní hodinu očekávám, že děti správně vytleskají počet předmětů ze s. 8, se kterou jsme se zabývali již minulou hodinu a že bez problémů přejdeme ke stejné činnosti na s. 9, bez ohledu na to, že tam jsou již uvedeny obrázky s různými předměty. U stavby věže z kostek doufám, že nebudou mít všichni stejnou kombinaci barev, ale předpokládám, že se objeví nějaká pravidelnost.

Průběh hodiny: První část hodiny (Povídáme si s. 8) proběhla přesně podle očekávání, každé dítě řeklo, co vidí na obrázku a celá třída vytleskala tento počet současně s vyslovováním číselné řady. Některé děti začínají číselnou řadu slovíčkem „Jedna/Jedno/Jeden“, další slovíčkem „Raz“. Já vyslovuji „Raz“ a nekomentuji jejich řadu. Když jsme přešli na obdobné cvičení na s. 9., byla na řadě Andrea (přepisuji rozhovor, jak jsem si jej zapamatovala):

UC01: „Andreo, povíš nám, co máme na dalším obrázku?“

AN01: „Jednu čepici a jedny brýle.“

UC02: „Kolikrát máme tedy tlesknout?“

AN02: „Dvakrát.“

UC03: „A proč zrovna dvakrát?“

AN03: „Protože čepice a brýle jsou dohromady dvě če ..., dvě hračky.“

UC04: „Tak nám poraď ještě jednou, abychom mohly tleskat.“

AN04: „Dvě hračky.“

Další děti již takto nerozebíraly každý obrázek, řekly rovnou správný počet, jen Jaroslav použil i slovo hračky a Tatiana použila slovo věci. Pak jsem se zeptala, jestli někoho nenapadá, co bychom měli s tímto cvičením udělat. Opět jsem nezvládla řídit diskuzi, protože jeden přes druhého vykřikoval, že budeme dělat čárky, jako včera. Musela jsem počkat, až se přestanou překřikovat, a pak požádat ještě Štěpána, aby řekl, co si myslí on. Štěpán zopakoval, že asi budeme dělat čárky podle toho, kolik je na každém obrázku hraček. Zeptala jsem se, zda tím tak souhlasí i ostatní, což všichni opět hlasitě odsouhlasili, a tak jsem je vyzvala k tomu, aby si vzali pastelky a provedli to, jak nejlépe dovedou. Všichni končili téměř stejně, jen u Gustíka byla zase jedna studentka a pomáhala mu s celým úkolem, je naprosto bezradný. Po této části jsem si vybrala pracovní sešity a požádala každého, kdo mi sešit odevzdal, aby si připravil dvě modré a tři žluté krychle, přičemž vzor potřebných krychlí jsem položila na učitelský stůl. Pak jsem zjistila, že krychle jsou příliš malé a stůl příliš daleko na to, aby všichni dobře viděli, obzvlášť když se pohybuji stále po středu třídy. Příště by bylo lepší, kdybych vzor znázornila na tabuli.

Druhou část hodiny jsem chtěla věnovat stavbě věže z krychlí. Požádala jsem děti, aby z připravených krychlí postavili „nějakou pěknou věž“. Záměrně jsem požila toto slovní spojení, které bylo stejné jako u vybarvování korálků pro princeznu nebo vagónků u vláčku (viz. 1. hodina). Tentokrát (na rozdíl od vybarvování) se objevilo nejvíce věží s použitím pravidelnosti v barvách (celkem 16 stejných věží s pravidelným střídáním barev) a mnohem méně věží s nepravidelně poskládanými krychlemi. Dalších šest dětí postavilo jiné věže, ale nestihla jsem si zaznamenat, kdo které a jestli měl každý jinou variantu nebo se některé opakovaly. Když se všem podařilo práci dokončit, vyzvala jsem je, aby se všichni postavili za židličku, zvedla jsem nahoru svoji věž pravidelně poskládanou a vyzvala jsem všechny, kdo má stejně postavenou věž, aby přešel před tabuli. V té chvíli jsem si nevšimla, že Dušan svoji stavbu rychle rozbořil a postavil stejnou věž s pravidelnou strukturou, jako jsem ukazovala. Bohužel jsem si toho všimla, až když byly všechny děti u tabule, po diskuzi s ostatními, jak stavěli a proč se jim tato stavba líbila. Teprve pak na sebe Dušan upozornil, že „Já jsem to měl taky jako Jan.“. Zřejmě si myslel, že to mělo být správně s pravidelným uspořádáním a chtěl to mít také správně. Já jsem pochválila všechny děti jak za pravidelné uspořádání, tak za originalitu.

Třetí část hodiny jsem si naplánovala uprostřed třídy, takže jsme se od tabule přesunuli do volného prostoru ve třídě. Pustili jsme si písničku „Prsty“ a zkoušeli jsme už také zpívat, protože pohyb už nám jde bez problémů. Zopakovali jsme si ji čtyřikrát – nejprve všichni zkusili zpívat i cvičit, pak děvčata zpívala a kluci cvičili, pak kluci cvičili a děvčata zpívala a nakonec jsme opět všichni zpívali i cvičili.

V poslední části hodiny jsme si sedli v kruhu na zem a postupně jsme si vzájemně dávali pokyny tak, aby každý dal pokyn i každý ho dostal. Např. „Jonáši, pojď doprostřed a třikrát tleskni, začni teď." Až se všichni vystřídali, uklidili jsme krychle do krabiček a ukončili jsme hodinu se zvoněním.

Postřehy a závěr: Pozitivní pro mě je, že si pamatuji křestní jména většiny dětí. Negativní naopak je, že jsem nepostřehla pokus o zalíbení se paní učitelce a nejsem si jistá, zda jsem zareagovala na vzniklou situaci správně. Odhadla jsem také, jak budou děti pracovat – skutečně nikdo neměl problémy s určením počtu do devíti předmětů, ani u věže se neobjevily naprosto stejné varianty. Musím podporovat i pravidelnost, i různost a originalitu u dalších vhodných úloh.

Příloha 02 Scénář hodiny pro případovou studii Krychlové stavby

Třída: 1. B
Datum výuky: 2. 3. 2011
Jméno vyučujícího: Jaroslava Kloboučková
Téma hodiny: **Objem a výška krychlové stavby**
Cíl hodiny: Žák vytvoří stavbu ze čtyř krychlí, zapíše ji plánem

Vedlejší cíle: Žák vyřeší aditivní úlohy pomocí krokování
Žák samostatně řeší různé úlohy vedoucí ke sčítání a odčítání v oboru do 14
Pomůcky: Karty s numerickými úlohami (s. 15, cv. 2 + několik dalších obdobného typu); sady krychlí, čtverečkovaný papír

Průběh hodiny včetně časového harmonogramu:

1. Společné zahájení hodiny, práce ve dvojicích 10 minut
Po úvodním pozdravu se děti rozdělí do dvojstupu. Každá dvojice si vylosuje jednu kartu s číselným zadáním, společně předvedou řešení na očíslovaném krokovacím páse, třída „hádá“, jaké zadání mají napsané na kartě a kontrolují správnost řešení. Doplněné karty umisťují na tabuli (pořadí dle volby dětí, neodpovídá pořadí v učebnici). Postupujeme tak dlouho, dokud se nevystřídají všechny dvojice. Poté se řešení „schová“ za tabuli.

2. Samostatná práce v lavicích 10 minut
Děti si otevřou učebnice na s. 15 a samostatně řeší úlohu 2 a 3 (kontrola úlohy 2 je na tabuli, kdo má hotovo, samostatně provede kontrolu, úlohu 3 si kontrolují děti vzájemně). Kdo má hotovo i s kontrolou, hledá takového hada, jehož první číslo je 5 a poslední je 1, obsahuje alespoň tři šipky.

3. Skupinová práce 15 minut
Děti vytvoří čtyři skupiny po 5 – 6 žácích. Každá skupina má k dispozici libovolný počet krychlí a čtverečkovaný papír s odpovídajícími rozměry čtverečků. Úkolem skupiny je nalézt v daném časovém limitu co nejvíce různých krychlových staveb, které můžeme postavit při použití právě čtyř krychlí (o objemu 4 krychle) a zakreslit na čtverečkovaný papír jejich plány.

4. Společná diskuze o počtu řešení 10 minut
Mluvčí jednotlivých skupin určí počet nalezených řešení, stavby předvede ostatním dětem a zhodnotí práci skupiny.

5. Domácí úkol s. 15, cvičení 4: Spoj čísla a vytvoř 6

Příloha 03 Scénář hodiny pro případovou studii Origami

Třída: 1. B
Datum výuky: 16. 9. 2010
Jméno vyučujícího: Jaroslava Kloboučková
Téma hodiny: **Číslice 1, 2, 3.**

Cíl hodiny: Žák vybarví počet předmětů podle stanoveného počtu
Žák nahradí konkrétní předměty zástupným modelem – čárkami.
Žák přeloží čtverec na poloviny
Vedlejší cíle: Žák rozumí geometrickým pojmům.
Žák vytvoří rytmus dle vlastní volby
Pomůcky: barevné pastelky, 6x sada geometrických tvarů (2x červený kruh, 2x modrý kruh, 4x červený čtverec, 4x modrý čtverec), barevná víčka, karty s obdélníky

Průběh hodiny včetně časového harmonogramu:

1. Společné zahájení hodiny, Kolik je dohromady dětí v kruhu? 10 minut

Po úvodním pozdravu v kruhu učitel vyzve dvě konkrétní dívky a jednoho chlapce, aby se postavili do středu kruhu. Ostatní děti určují, kolik dětí je uvnitř kruhu, svůj výsledek ukazují na prstech. Hra se opakuje tak dlouho, dokud se v kruhu nevystřídají všechny děti.

2. Tvoříme barevný rytmus. Práce ve skupinách 10 minut

Děti vytvoří 6 skupin. Každá skupina dostane obálku s dvanácti geometrickými tvary. Úkolem je poskládat všechny tvary do jedné řady tak, aby byla řada co nejhezčí. Každá skupina představí svoji řadu a vysvětlí ostatním, jak řadu vytvořili a proč se jim líbí právě tato řada. Po prohlédnutí všech řad si každý žák vezme jedno víčko a položí ho k tomu rytmu, který se mu nejvíce líbil. Řada s nejvíce víčky se vystaví na nástěnku.

3. Kolik dohromady? Práce ve dvojicích 10 minut

Na lavici si každá dvojice připraví destičku se dvěma obdélníky a sadu geometrických tvarů. Učitel dává pokyny, jaké tvary a v jakém počtu děti umístí na desku (Dvě hvězdičky a dva čtverce. Kolik dohromady?) Děti vytvářejí vše na lavici a zapisují na mazací destičku. Postupně každá dvojice vysvětlí jedno řešení – pracovní postup a řekne výsledek. Ostatní děti kontrolují. Vystřídají se všechny dvojice.

4. Překládání čtverce. Samostatná práce. 10 minut

Každý žák obdrží dva barevné čtverce. Žáci budou vyzváni k přeložení nejprve jednoho čtverce na dvě stejné části. Někteří žáci vysvětlí své postupy a někteří zdůvodní, proč jsou jejich části stejné. Poté se pokusí i druhý čtverec přehnout tak, aby vznikly dvě stejné části, ale jinak, než u prvního čtverce.

5. Samostatná práce v pracovní učebnici 5 minut

Všichni si otevřou učebnici na straně 15, kde samostatně doplní úlohu uprostřed stránky. Kolik dohromady?, kdo má hotovo, doplní čárky k číslicím.

6. Domácí úkol

Strana 15. Vybarvi 1, nebo 2 (nahoře)

Příloha 04 Scénář hodiny pro případovou studii Dřívka

Třída: 3. B
Datum výuky: 4. 10. 2012
Jméno vyučujícího: Jaroslava Kloboučková
Téma hodiny: **Zobecňování**

Cíl hodiny: Žák řeší slovní úlohy se dvěma neznámými
Žák hledá zákonitosti mezi dvěma proměnnými
Žák určí obvod a obsah čtverce a obdélníku

Pomůcky: **dřívka, čtverečkovaný papír, pastelky**

Průběh hodiny včetně časového harmonogramu:

1. Úvodní motivace 5 minut
   Dnešní hodina se bude týkat práce farmáře, který pěstuje na své farmě husy, slepice a krocany. Farmářka bude zakládat novou květinovou zahrádku, kterou musí oplotit a určit obsah každého záhonu. Farmář potřebuje poradit s panely pro tvorbu výběhu pro husy a slepice.
2. Slovní úlohy o zvířátkách, samostatná práce 10 minut
   Učebnice, s. 23, cv. 3. Zvol si jednu z úloh a vyřeš ji. Společná kontrola ve skupinách podle zvolené úlohy – ve třídě jsou papíry odpovídající barvy – modrá, žlutá a zelená farma. Každá z úloh je prezentována pro třídu.
3. Tvorba výběhu pro husy a pro slepice, práce ve dvojici 15 minut
   Každá husa na farmě potřebuje výběh čtvercového tvaru, který se vyrábí ze stejných dílů (dřívka), každá slepice potřebuje výběh trojúhelníkového tvaru ze stejných dílů (dřívek). Kolik nejméně dílů (dřívek) potřebujeme k vytvoření jednoho výběhu, dvou? (ujasnění pravidel, jak vytvářet výběhy v řadě – co nejméně použitých dílů). Totéž pro trojúhelníkové výběhy. Vyplnění tabulky v pracovním sešitě (s. 19/16).
4. Zakládáme zahradu, skupinová práce 10 minut
   Farmářka zakládá zahradu podle plánu (s. 23, cv. 4,5). Každá skupina má k dispozici čtverečkovaný papír (po 1 cm). Ve skupině znázorněte plán zahrady na čtverečkovaný papír s vyznačením jednotlivých záhonů. Na záhonech se bude pěstovat zelí (zelený záhon), kapusta (modrý záhon), salát (žlutý záhon) a zázvor (fialový záhon). Farmářka si nejprve vyrobí model zahrady s rozměry podle obrázku. Kolik papíru potřebuje na jednotlivé záhony (kolik sazenic je potřeba od každého druhu, když na jednom čtverci o straně 1 cm (na plánu) se bude jedna sazenice), Kolik provázku potřebuje na ohraničení jednotlivých záhonů? Odpovězte na otázky v učebnici.
   Pro rychlíky: Určete obvod i obsah skutečné zahrady i jednotlivých záhonů, jestliže ve skutečnosti má žlutý záhon rozměry 2 m x 4 m.
5. Závěr 5 minut
   Napiš na papír, co ses dnes konkrétně naučil nového od svých spolužáků.

Příloha 05 Scénář hodiny pro případovou studii Parkety

Třída: 3. B
Datum výuky: 20. 9. 2012
Jméno vyučujícího: Jaroslava Kloboučková
Téma hodiny: **Parkety**

Cíl hodiny: Žák pokryje obdélníkovou podlahu parketami
Žák sčítá dvě dvojciferná čísla (pamětně i písemně)
Žák tvoří slovní úlohy vedoucí k dělení v oboru malé násobilky

Pomůcky: Karty s úlohami na tvorbu slovních zadání (6:2, 8:2, 15:3, 9:3, 24:6,12:4); podlahy o rozměrech 4 x 3, sada parket do dvojice.

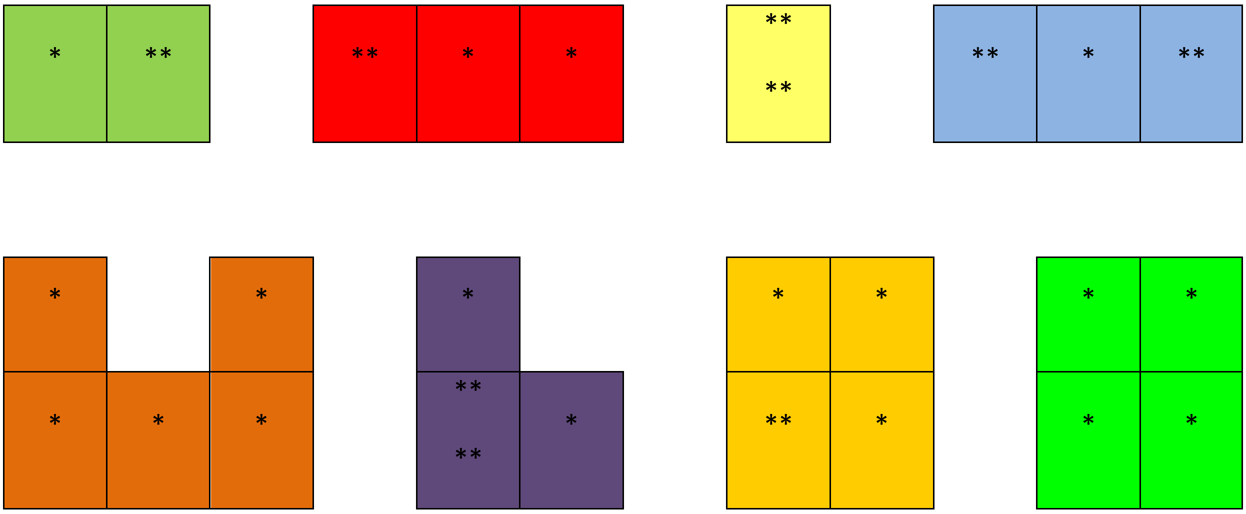
Průběh hodiny včetně časového harmonogramu:

1. Úvodní motivace 5 minut
   Tématem dnešní hodiny je zařizování a vybavení nového bytu. Které činnosti musíme udělat, když zařizujeme nový byt?
2. Tvorba slovních úloh, skupinová práce 10 minut
   Děti u jednoho stolečku dostanou/si vylosují jednu kartu se zadáním početního záznamu vedoucí k dělení v oboru malé násobilky a vytvoří slovní úlohu z prostředí zařizování bytu. Společně se domluví na vytvoření slovní úlohy, která je řešitelná uvedeným zápisem. Po 3 minutách mluvčí zadá úlohu třídě, děti ji řeší a odhalí záznam na lístku. Vystřídají se všechny skupiny, hodnotíme originalitu a řešitelnost vytvořené úlohy, také zda odpovídá číselnému zadání.
3. Pokládání parket na podlahu, práce ve dvojici 15 minut
   V novém bytě pokládáme podlahu z parket. Všechny místnosti bytu mají fiktivní rozměry 4 x 3. V bytě u Adamových budou pokládat parkety DUO, RŮŽEK, ÍČKO, ELKO. U Bémů mají k dispozici MONO, ÍČKO, ELKO A ČTYŘKU. V bytě u Cibulků mají k dispozici vždy tři parkety. Žádné dvě podlahy nechtějí mít stejné. Kolik pokojů je v jednotlivých bytech?
4. Písemné sčítání dvojciferných čísel, samostatná práce 10 minut
   Při nákupu drobného zařízení do nového bytu musíme také spočítat útratu. Samostatně vypočítej úlohu na s. 12, cv. 1 do sešitu (přepiš a vypočítej). Společná kontrola výsledků s diskuzí o správnosti i o postupu práce.
5. Závěrečné zhodnocení 5 minut
   Oznámkuj se podle klasifikační stupnice (1 nejlepší, 5 nejhorší), ukazuj na prstech
   a) Vytvořím slovní úlohu společně se spolužáky
   b) Pokryju podlahu parketami, najdu alespoň dvě různá řešení
   c) Sečtu správně dvě dvojciferná čísla – za každou chybu snížím svoji známku o jeden stupeň

Příloha 06 Pracovní list Krychlové stavby

Datum zadání: 12. 11. 2011

Zadání: Zapiš do tabulky počet krychlí v jednotlivých podlažích u jednotlivých staveb.

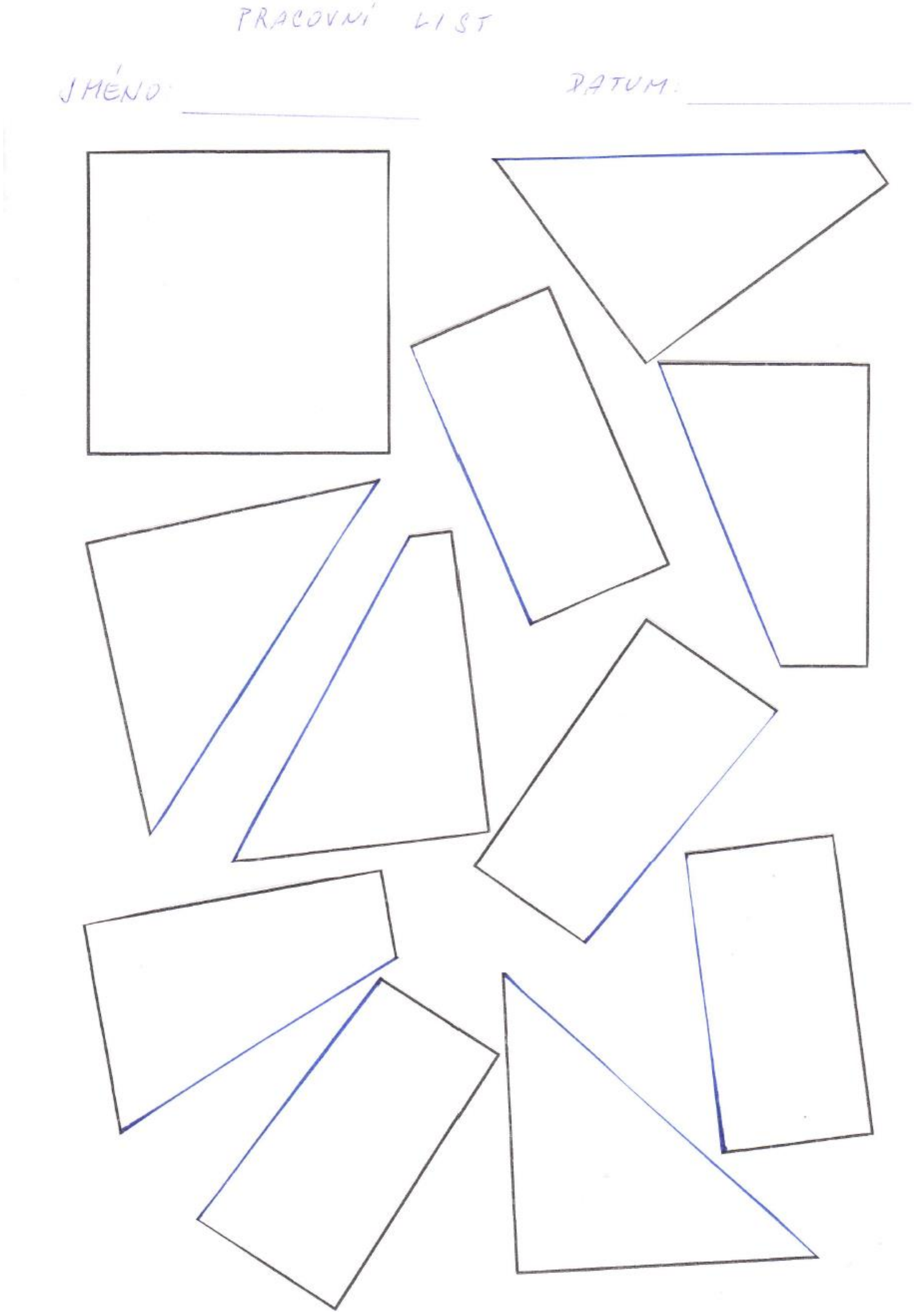


Barva stavby								
Počet krychlí v 1. podlaží								
Počet krychlí v 2. podlaží								
Počet krychlí v 3. podlaží								
Počet krychlí v 4. podlaží								
Počet krychlí v celé stavbě								

Příloha 07 Pracovní list Origami

Datum zadání: 25. 1. 2011

Zadání: Vybarvi stejnou barvou ty dílky, ze kterých je možné poskládat čtverec. Díly, ze kterých to není možné, zůstanou nevybarvené.



Příloha 08 Pracovní list Dřívka

Datum zadání: 6. 11. 2012

Zadání: Vytvoř z dřívek okna (výběhy) daného tvaru a doplň tabulky (do prázdných sloupců doplň čísla dle vlastní volby), na zvláštní papír navrhni tvar odpovídající údajům v tabulce.

PRACOVNÍ LIST - DŘÍVKA

Jméno žáka, třída:

Datum vypracování:

1. K vytvoření čtyř trojúhelníkových oken potřebuješ devět dřívek. Doplň chybějící údaje do tabulky.

Počet oken	1	2	3	4	5	6	10		40				o
Počet dřívek				9				17		101			

2. K vytvoření tří čtvercových oken potřebuješ deset dřívek. Doplň chybějící údaje do tabulky.

Počet oken	1	2	3	4	5	6	10		20				o
Počet dřívek			10					46		154			

3. K vytvoření dvou stejných domečků se střechou potřebuješ jedenáct dřívek. Doplň údaje do tabulky. Zakresli domečky.

Počet oken	1	2	3	4	5	6	10		30				o
Počet dřívek		11						66		256			

4. K vytvoření pěti stejných rovinných útvarů potřebuješ třicet dřívek. Doplň údaje do tabulky. Navrhni útvary.

Počet oken	1	2	3	4	5	6	10		50				o
Počet dřívek					30			78		330			

5. K vytvoření šesti stejných rovinných útvarů potřebuješ 43 dřívek. Doplň údaje do tabulky. Navrhni útvary.

Počet oken	1	2	3	4	5	6	10		30				o
Počet dřívek						43		99		344			

Příloha 09 Pracovní list Parkety

Datum zadání: 25. 9. 2012

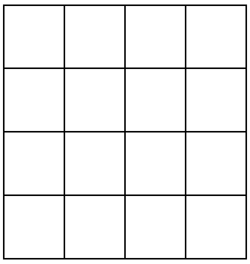
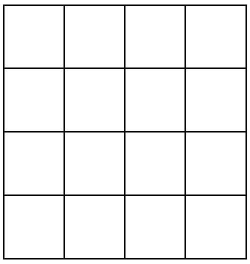
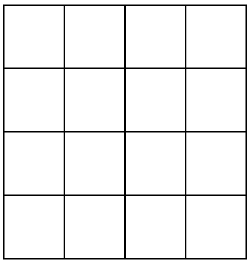
Zadání:
Podlahy ve tvaru čtverce pokryj jednou parketou MONO a pak pouze parketami typu ÍČKO. Zakresli své řešení.

PRACOVNÍ LIST - PARKETY

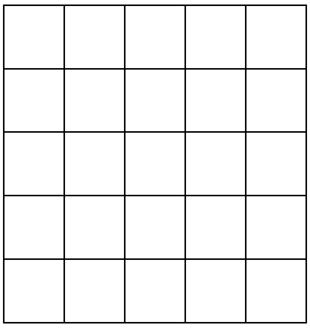
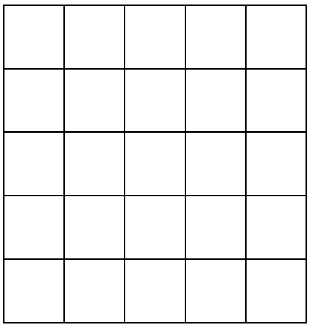
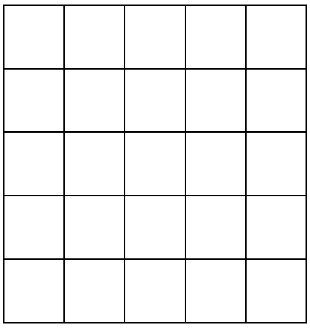
Jméno žáka, třída:

Datum vypracování:

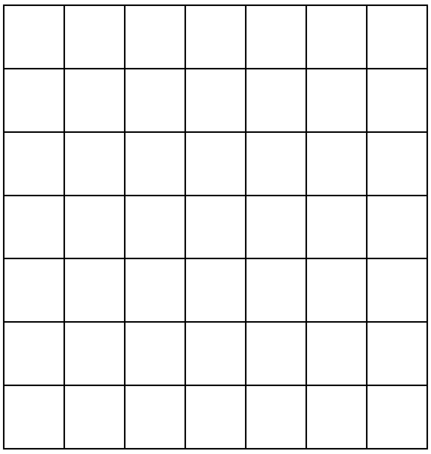
1. Pokryj čtvercovou podlahu 4 x 4 jednou parketou MONO a dále pouze parketami ÍČKO. Hledej více řešení.

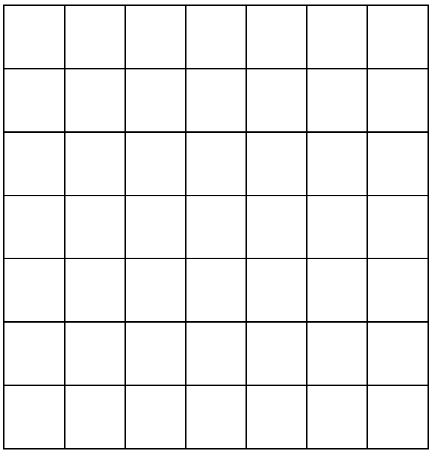




2. Pokryj čtvercovou podlahu 5 x 5 jednou parketou MONO a dále pouze parketami ÍČKO. Hledej více řešení.

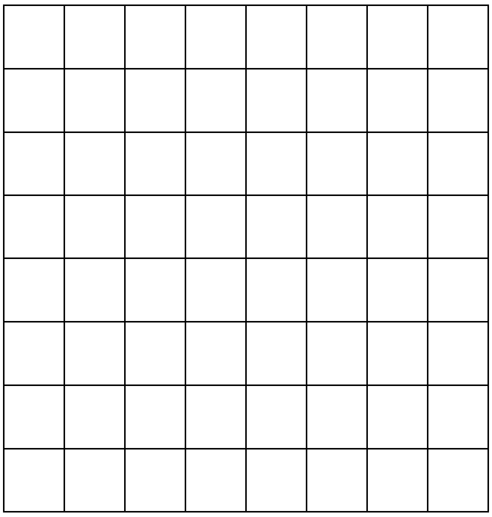




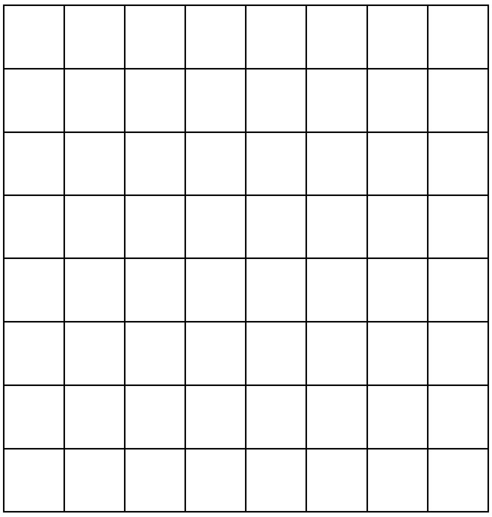
3. Pokryj čtvercovou podlahu 7 x 7 jednou parketou MONO a dále pouze parketami ÍČKO. Hledej více řešení.





4. Pokryj čtvercovou podlahu 8 x 8 jednou parketou MONO a dále pouze parketami ÍČKO. Hledej více řešení.





Příloha 10 Obvod a obsah – zadání kontrolních úloh

PRACOVNÍ LIST PRO ŽÁKA

Téma: Obvody a obsahy

Jméno žáka, škola:

Datum vypracování:

OBS_11: Pastvina, která má tvar trojúhelníka, má být obehnána drátem. Kolik metrů drátu je potřeba nakoupit, když strany pastviny měří 55 m, 48 m a 37 m?

OBS_12: Zahrada, která má tvar obdélníku, má délku 54 m a šířku 26 m.Kolik metrů pletiva je potřeba k jejímu oplocení?

OBS_13: Kolem čtvercového okna o straně 140 cm je potřeba dát těsnění. V bytě máme celkem šest takových oken. Kolik těsnící pásky je potřeba nakoupit k utěsnění těchto oken?

OBS_14: Jak velkou plochu pokryjeme obdélníkovým kobercem, který je dlouhý 140 cm a široký 90 cm?

OBS_15: Kolik zaplatí výrobce za hedvábnou látku na 300 šátků, jestliže každý má tvar čtverce o straně délky 50 cm? Jeden čtverečný metr hedvábí stojí u dodavatele 2 000 Kč.

OBS_16: K vydláždění terasy bylo použito 240 stejných čtvercových dlaždic. V jedné řadě bylo položeno 20 těchto dlaždic. Kolik řad je na celé terase?

OBS_17: Katka chce čtvercový ubrus obšít krajkou. Má pruh krajky dlouhý 5 m a spočítala si, že jí ještě 40 cm krajky zbude. Jak dlouhá je jedna strana tohoto ubrusu?

OBS_18: Vypočítej obvod a obsah čtverce o straně délky 16 cm.

OBS_19: Vypočítej obvod a obsah obdélníku, který je dlouhý 32 cm a široký 16 cm.

Příloha 11 Protokol experimentu ze dne 2. 3. 2011

Datum konání:	2. 3. 2011
Hodina:	první (8:15 – 9:00)
Třída:	1. B
Škola:	FZŠ Táborská, Praha 4 - Nusle
Počet žáků:	21
Vyučující:	J. Kloboučková
Videozáznam:	1.B_2010_03_02_V
Téma:	**Výška krychlové stavby**

UC01:	Ještě máte chvilku čas, hledejte ještě další stavby.
VI01.	Ale my už máme všechny.
UC02:	A kolik jich máte?
ST01:	Jedna, dva, tři, čtyři, pět, šest sedm, osm, devět, deset, jedenáct, dvanáct. A tuhle jsem postavila já.
VI02:	No, máme jich dvanáct a to je všechno.
UC03:	Já myslím, že by se ještě nějaká dala postavit, ne?
VA01:	Já to zkusím. (*postaví znovu jednu stavbu v jiné poloze*)
VI03:	To ne, tu už máme. To už prostě víc nejde.
UC04:	(*Ostatní berou do ruky kostky pokouší se postavit další stavby, VI jim je bere z rukou*) Ale tvoji kamarádi ti nevěří, koukni, třeba se jim to povede.
VI04:	Ale to už fakt prostě nejde. Fakt.
UC05:	Tak je zkus přesvědčit, že to nejde.
VI05:	No když tady z té vysoké (*ukazuje nejvyšší stavbu*) vezmu tu horní kostku, tak ji musím dát takhle vedle. A to tady máme (*ukazuje odpovídající stavbu*). A když tady zase vezmu tu horní, tak to můžeme dát (*ukazuje stále u původní stavby*) sem, sem, sem, sem nebo sem (*ukáže všechny možnosti přesunu krychle*). A to tady taky všechno máme (*ukáže rukou obecně ostatní stavby*). A u těch nízkých to je stejné.
UC06:	Tak co tomu říkáte, má Vít pravdu?
SO01:	Já mu vůbec nerozumím.
ST01:	(*Do této chvíle VI jen pozorovala, drží v ruce jednu kostku a pohybuje s ní v prostoru, jak VI vysvětluje.*) No jo, už jich víc nenajdeme.
UC07:	Tak to v závěru prozradíte ostatním, co jste právě objevili, ano?

Příloha 12 Protokol experimentu ze dne 12. 11. 2011

Datum konání:	12. 11. 2011
Hodina:	první (8:15 – 9:00)
Třída:	2. B
Škola:	FZŠ Táborská, Praha 4 - Nusle
Počet žáků:	19
Vyučující:	J. Kloboučková
Videozáznam:	2.B_2011_11_12_V
Téma:	**Evidence počtu krychlí v jednotlivých podlažích**

KV01:	Paní učitelko, já jsem si všimla něčeho zajímavého, ale nevím, jestli to není špatně.
UC01:	Tak nám to zkus vysvětlit (podívá se na hodinky) a my se pokusíme posoudit, jestli to není špatně.
KV02:	Tady v té červené stavbě (ukazuje svoji práci v sešitě) máme tři kostky v prvním podlaží a po jedné v těch dalších. To už jsme jednou měli, ale ta stavba vypadala jinak, bylo to tak jako růžek.
UC02:	Ty myslíš, jako ten plán, že měl jiný tvar?
KV03:	No, to bylo jinak namalované (přikyvuje), ale v té tabulce to bylo stejné.
PA01:	No to byla jiná stavba, tak to musí být jinak namalované. A klidně to přece může mít stejně kostek v těch (několikrát ukazuje rukou vodorovný směr) podlažích.
KV04:	A nemáme to teda špatně? (*rozhlédne se po třídě*)
ŠT01:	Paní učitelko, můžu jim to namalovat?
UC03:	Samozřejmě.
ŠI02:	Ta naše červená (*jde k tabuli a kreslí plán červené stavby*) má tři kostky v prvním podlaží a jednu v druhém. Kdyby ale ta horní kostka byla tady (*nakreslí druhý plán, který má stejný tvar, ale kde je kostka z druhého podlaží uprostřed*), byla by to jiná stavba a měla by to stejně zapsané. A nebo by ty tři kostky mohly být v prvním do růžku, ale to by zase mohly být dvě různé stavby, buď by ta horní byla na kraji, nebo v rohu (*kreslí plány dalších dvou staveb*).
JA01:	(*vyskočí k tabuli*) A nebo by ta horní kostka mohla být na druhé straně. (ukazuje na druhou krajovou kostku v rohové stavbě)
PA02:	Nemohla, to by byla stejná jako ta, co má Štěpán, jenom opačně.
UC04:	Tak co, Květo, vysvětlili ti kluci, jestli jsi to myslela správně?
KV05:	Já myslím, že jo.

Příloha 13 Protokol experimentu ze dne 16. 9. 2010

Datum konání:	16. 9. 2010
Hodina:	první (8:15 – 9:00)
Třída:	1. B
Škola:	FZŠ Táborská, Praha 4 - Nusle
Počet žáků:	20
Vyučující:	J. Kloboučková
Videozáznam:	1.B_2010_09_16_V
Téma:	**Překládání čtverce na poloviny**

UC01	Jolana a Viktor rozdají každému spolužákovi dva čtverce. (Děti rozdávají pomůcky, některé děti si vybírají barvu dle vlastního výběru, Patrik odmítá růžový čtverec.)
UC02	Všichni si vezměte jeden ze čtverců a přeložte jej tak, aby vám vznikly dvě úplně stejné části. Jak to provedete?
AN01	Já jsem to takhle dala k sobě ty růžky
UC03	Aha, a co ty, Květo?
KV01	Já jsem to dala taky k sobě, ale jinak.
AU01	Paní učitelko, já nevím, jak to mám udělat.
UC04	Popros někoho, kdo ví, a podívej se, jak to dělá on, ano?
AU02	Patriku, ukážeš mi to?
PA01	No to musíš takhle k sobě, aby nic nepřečuhovalo, a je to.
MA01	Paní učitelko, paní učitelko, Jan to má blbě!
JA01	Nežaluj, Maruno!
MA02	Paní učitelko, Jan to neumí, jemu ty růžky tady přečuhujou, a tady taky. (Ukazuje na Janův nepřesně přeložený čtverec tak, aby vznikly dva trojúhelníky, ale protější vrcholy se nepřekrývají – Jan má problémy s jemnou motorikou. Téměř celá třída se jde podívat k Janovi.)
JA02	Mně se to tady nepovedlo. (Skloněná hlava, mluví téměř plačtivě.)
ŠT01	Ukaž (prohlíží si rozevřený čtverec), vždyť to je dobře. (Znovu přehýbá a rozevírá čtverec.)
UC05	Tak nejdřív se vrátíme všichni do lavic a ukážeme si, jak jsme přehnuli své čtverce. Tady vidím, že některým z vás se podařilo přehnout svůj čtverec tak, aby vznikly dva stejné obdélníky. Vasile, řekni nám všem, jak jsi to udělal a já to podle tebe vyzkouším.
VA01	To musíš vzít tady ty dva rohy vedle sebe a přehnout to takhle napůl. A musí to být přesně. (Ukazuje znovu na svém čtverci)
UC06	(Přehýbá svůj čtverec na dva stejné obdélníky podle získané rady.) Vy, co máte také dva obdélníky, dělali jste to stejně? (Všichni přitakávají, nikdo nemá jiný postup)
VI01	Já jsem to jen měl takhle v ruce (ukazuje, jak přehnul čtverec v prostoru, nikoliv položený na lavici).
UC07	Komu se tedy povedly dva stejné obdélníky, ten je zvedne nahoru, abychom všichni viděli, jak se vám to povedlo. Některým se podařilo přehnout čtverec na dva stejné trojúhelníky, jak tady vidím. Maruško, můžeš nám vysvětlit, jak jsi to provedla? A já si nechám poradit a zkusím to také tak. (Učitelka bere do ruky nový čtverec.)

MA03	No to se vezmou taky tady ty růžky, ale musí se dát takhle přes sebe naproti, aby to bylo. Ale musí se to taky takhle dobře, aby to byly ty, trojúhelníky. Ale Janovi se to nepovedlo!
UC08	Počkej, na Janovu práci se také hned podíváme, ale nejdřív si to vyzkouším i já podle tvé rady. Tak komu se povedly dva stejné trojúhelníky, jako mě teď, zvedne je nahoru. No to se vám skvěle podařilo přehnout ty čtverce podle úhlopříčky, tak máte dva stejné trojúhelníky. (Jan sedí zaraženě, dokonce vyplázne na spolužačku jazyk).
ŠT02	Ale já myslím, že to má Jan taky dobře, i když nemá dva trojúhelníky.
UC09	Štěpáne, tak pojďte sem i s Janem a ukaž jemu i všem ostatním, jak to myslíš. (Štěpán jde k tabuli, Jan neochotně také.)
ŠT03	Já myslím, že to je stejné, ale nejsou to trojúhelníky, ale to takový čtverečky, vlastně ne čtverečky, ale to (přemýšlí, nemůže najít vhodné slovo. Třída šumí, většinou nesouhlasí.)
VA02	Ale když mu to přečuhuje, tak to nemůže být stejné, protože tady kousek chybí.
ŠT04	No to jo, ale tady zase stejnej kousek přebývá. (Ukazuje a znovu jej přehýbá a otevírá.)
UC10	(Vezme klukům čtverec z ruky.) Tak jestli tomu dobře rozumím, tak Šimon si myslí, že to má Jirka dobře, i když mu to tady kousek přečuhuje a tady zase kousek chybí. A Vasil si myslí, že to Jan nemá dobře, protože to není stejné. Co si myslíte vy ostatní. Kdo souhlasí se Štěpánem, že to má Jan dobře? (Nesměle se hlásí několik kluků, ale spíš z loajality k Janovi.) A kdo si myslí, že to Jan nemá dobře? (Hlásí se většina dětí, někteří jsou nerozhodní.) Kdo jste se hlásili, že souhlasíte se Štěpánem, uměli byste to nějak vysvětlit, proč to je dobře?
JV01	Já bych to takhle přešmikl. (Vezme nůžky a rozstřihne čtverec podle přehybu.)
ŠT05	(Vezme oba přestřižené dílky a přiloží je na sebe a otočí se k Janovi.) Vidíš, je to stejný. (Ukazuje i třídě, ostatní souhlasně mručí).
UC11	Tak Janovi se povedlo vytvořit dva shodné pravoúhlé lichoběžníky, vidíte? To je šikula. (Jan hrdě odchází do lavice.)
JA03	Vidíš, Maruno! (vítězoslavně)
UC12	Z toho druhého čtverce vytvořte zase dvě stejné části, ale jinak, než jste to udělali v předchozím případě. Kdo bude chtít, může vyzkoušet i Janův způsob. Kdyby někdo stihl a chtěl ještě třetí čtverec, může si pro něj přijít. (Téměř všechny děti se pokoušely o přeložení na dva shodné lichoběžníky, ale ne všem se to podařilo přesně.)

Příloha 14 Protokol experimentu ze dne 4. 10. 2012

Datum konání:	4. 10. 2012
Hodina:	první (8:15 – 9:00)
Třída:	3. B
Škola:	FZŠ Táborská, Praha 4 - Nusle
Počet žáků:	22
Vyučující:	J. Kloboučková
Videozáznam:	3.B_2012_10_04_V
Téma:	**Zobecňování**

UC01	(na tabuli je doplněno prvních šest sloupců z každé tabulky). Kdo nám doplní nějaké další údaje do tabulky? (hlásí se i Květa) Květo, pojď doplnit některý váš výsledek.
KV01	(odpočítá si osmý sloupec v tabulce čtvercových oken, napíše číslo 8 a pod ně 25)
UC02	Jak jste na ten výsledek přišly? Také jste počítaly po jedné, jako ostatní?
KV02	Ne, to už jsme nestavěly. Ale na první okno jsou potřeba 4 dřívka a na každé další jen tři. Když mám udělat 8 oken, tak na první je zase 4 a k tomu 3x sedm, tou trojkou násobím o jedno míň, než kolik chci oken.
UC03	Aha, rozumíte tomu? To je zajímavá metoda, jak všechno doplnit.
AN01	My jsme to už pak taky všechno nestavěly, tady na tom druhém řádku jsou lichá čísla vždycky (ukazuje druhý řádek u trojúhelníkových oken), tak jsme si nahoru postupně napsaly 3, 4, až tady 14 a dole jsem to jenom přidávala. (Napíše 14 jako počet trojúhelníkových oken a pod to 31)
ŠT01	Ale nám to vyšlo jinak. My máme u čtrnáctky 29, to je také liché.
UC04	Tak to máme dva různé výsledky pro 14 trojúhelníkových výběhů. Nebo oken. Jak zjistíme, co je dobře? Nebo mohou být správně oba výsledky?
MA01	To si ne, když staví ten farmář ty výběhy a má jich 14, a jinej taky 14 tak potřebuje stejně dílů, jako ten první, to musí mít vždycky stejně.
KV03	(skládá na lavici řadu trojúhelníkových oken a počítá použitá dřívka). Mě to vyšlo 29, jako Štěpánovi.
AN02	(Při diskuzi ostatních se soustředila na svůj pracovní sešit a s Nikolou společně potichu kontrolovaly své výsledky.) Jo, my to máme špatně, my jsme přidávaly tu dvojku a tady pro 11 oken jsme ji přidaly dvakrát, tak to máme špatně i dál. Ale už jsme si to opravily, Štěpán to má dobře.
UC05	Tak postoupíme dál a doplníme ještě další výsledky. (Děti postupně doplní své výsledky, již nic nekomentují). Ještě na tabuli nevidím odpovědi na otázky z učebnice (bere učebnici a čte: Kolik dřívek je potřeba na vytvoření 33 oken? Čtvercových. A kolik dřívek na vytvoření 40 oken trojúhelníkových? Vypočítal to někdo?
PA01	No my jsme se Štěpánem zjistili, že u těch čtvercových výběhů to je jak říkala Květa, ale my jsme to počítali trochu jinak. Vždycky se začne tím prvním dřívkem, to se položí a pak se přidávají tři dřívka. Jedno okno je teda 1 + 3, dvě okna je 1 + 3 a ještě 3 a tak pořád dál. Kolik je těch oken, tolikrát tam přidáme tu dvojku. Takž když těch čtverečků má být 33, tak je to 1 a k tomu 33 krát trojka a to je rovná stovka dřívek.
MA02	Tolik? To je trochu moc.

PA02	Když nevěříš, tak si to postav, ale je to dobře.
AN03	No to je stejné jako jsme my dvě počítaly s tou dvojkou. Když je to trojúhelník, tak se přidává dvojka, když čtverec, tak trojka. A kdyby měl ještě nějaká další zvířata, tak by to byla čtyřka nebo pětka a tak.
ŠT02	(Staví ze dřívek pravidelný pětiúhelník) Ale to by pak ty ohrady nebyly v řadě, to by se mu tady zatáčelo.
AN04	Ale když z toho uděláš takhle domečky, tak to v řadě je. (Přesune dvě dřívka do vodorovné polohy a přidá další „domeček“ na důkaz linearity.)
UC06	Tak to je zajímavé, ale my doplníme ještě poslední údaje a budeme pokračovat v práci.

Příloha 15 RVPZV Matematika a její aplikace - Geometrie

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání platný od 1. 9. 2005, úprava platná od 1. 9. 2013. (http://www.msmt.cz/vzdelavani/zakladni-vzdelavani/upraveny-ramcovy-vzdelavaci-program-pro-zakladni-vzdelavani)

MATEMATIKA A JEJÍ APLIKACE: charakteristika vzdělávací oblasti

Vzdělávací oblast **Matematika a její aplikace** je v základním vzdělávání založena především na aktivních činnostech, které jsou typické pro práci s matematickými objekty a pro užití matematiky v reálných situacích. Poskytuje vědomosti a dovednosti potřebné v praktickém životě, a umožňuje tak získávat matematickou gramotnost. Pro tuto svoji nezastupitelnou roli prolíná celým základním vzděláváním a vytváří předpoklady pro další úspěšné studium.

V tematickém okruhu *Geometrie v rovině a v prostoru* žáci určují a znázorňují geometrické útvary a geometricky modelují reálné situace, hledají podobnosti a odlišnosti útvarů, které se vyskytují všude kolem nás, uvědomují si vzájemné polohy objektů v rovině (resp. v prostoru), učí se porovnávat, odhadovat, měřit délku, velikost úhlu, obvod a obsah (resp. povrch a objem), zdokonalovat svůj grafický projev. Zkoumání tvaru a prostoru vede žáky k řešení polohových a metrických úloh a problémů, které vycházejí z běžných životních situací.

GEOMETRIE V ROVINĚ A V PROSTORU

1. stupeň

Očekávané výstupy – 1. období

žák

- M-3-3-01 rozezná, pojmenuje, vymodeluje a popíše základní rovinné útvary a jednoduchá tělesa; nachází v realitě jejich reprezentaci
- M-3-3-02 porovnává velikost útvarů, měří a odhaduje délku úsečky
- M-3-3-03 rozezná a modeluje jednoduché souměrné útvary v rovině

Očekávané výstupy – 2. období

žák

- M-5-3-01 narýsuje a znázorní základní rovinné útvary (čtverec, obdélník, trojúhelník a kružnici); užívá jednoduché konstrukce
- M-5-3-02 sčítá a odčítá graficky úsečky; určí délku lomené čáry, obvod mnohoúhelníku sečtením délek jeho stran
- M-5-3-03 sestrojí rovnoběžky a kolmice
- M-5-3-04 určí obsah obrazce pomocí čtvercové sítě a užívá základní jednotky obsahu
- M-5-3-05 rozpozná a znázorní ve čtvercové síti jednoduché osově souměrné útvary a určí osu souměrnosti útvaru překládáním papíru

Učivo

- **základní útvary v rovině** – lomená čára, přímka, polopřímka, úsečka, čtverec, kružnice, obdélník, trojúhelník, kruh, čtyřúhelník, mnohoúhelník
- **základní útvary v prostoru** – kvádr, krychle, jehlan, koule, kužel, válec
- délka úsečky; jednotky délky a jejich převody
- obvod a obsah obrazce
- vzájemná poloha dvou přímek v rovině
- osově souměrné útvary

2. stupeň

- M-9-3-01 zdůvodňuje a využívá polohové a metrické vlastnosti základních rovinných útvarů při řešení úloh a jednoduchých praktických problémů; využívá potřebnou matematickou symboliku
- M-9-3-02 charakterizuje a třídí základní rovinné útvary
- M-9-3-03 určuje velikost úhlu měřením a výpočtem
- M-9-3-04 odhaduje a vypočítá obsah a obvod základních rovinných útvarů
- M-9-3-05 využívá pojem množina všech bodů dané vlastnosti k charakteristice útvaru a k řešení polohových a nepolohových konstrukčních úloh
- M-9-3-06 načrtne a sestrojí rovinné útvary
- M-9-3-07 užívá k argumentaci a při výpočtech věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků
- M-9-3-08 načrtne a sestrojí obraz rovinného útvaru ve středové a osové souměrnosti, určí osově a středově souměrný útvar
- M-9-3-09 určuje a charakterizuje základní prostorové útvary (tělesa), analyzuje jejich vlastnosti
- M-9-3-10 odhaduje a vypočítá objem a povrch těles
- M-9-3-11 načrtne a sestrojí sítě základních těles
- M-9-3-12 načrtne a sestrojí obraz jednoduchých těles v rovině
- M-9-3-13 analyzuje a řeší aplikační geometrické úlohy s využitím osvojeného matematického aparátu

Učivo

- **rovinné útvary** – přímka, polopřímka, úsečka, kružnice, kruh, úhel, trojúhelník, čtyřúhelník (lichoběžník, rovnoběžník), pravidelné mnohoúhelníky, vzájemná poloha přímek v rovině (typy úhlů), shodnost a podobnost (věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků)
- **metrické vlastnosti v rovině** – druhy úhlů, vzdálenost bodu od přímky, trojúhelníková nerovnost, Pythagorova věta
- **prostorové útvary** – kvádr, krychle, rotační válec, jehlan, rotační kužel, koule, kolmý hranol
- **konstrukční úlohy** – množiny všech bodů dané vlastnosti (osa úsečky, osa úhlu, Thaletova kružnice), osová souměrnost, středová souměrnost

Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta

M. Rettigové 4, 116 39 Praha 1

Evidenční list žadatelů o nahlédnutí do listinné podoby práce

Jsem si vědom/a, že závěrečná práce je autorským dílem a že informace získané nahlédnutím do zveřejněné závěrečné práce nemohou být použity k výdělečným účelům, ani nemohou být vydávány za studijní, vědeckou nebo jinou tvůrčí činnost jiné osoby než autora.

Byl/a jsem seznámen/a se skutečností, že si mohu pořizovat výpisy, opisy nebo rozmnoženiny závěrečné práce, jsem však povinen/povinna s nimi nakládat jako s autorským dílem a zachovávat pravidla uvedená v předchozím odstavci tohoto prohlášení.

Poř. č.	Datum	Jméno a příjmení	Adresa trvalého bydliště	Podpis
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				
7.				
8.				
9.				
10.				